



**MINISTERIO DE EDUCACIÓN SUPERIOR
INSTITUTO SUPERIOR MINERO METALÚRGICO**

“Dr. ANTONIO NÚÑEZ JIMÉNEZ”
FACULTAD DE METALURGIA Y ELECTROMECAÁNICA
DEPARTAMENTO DE METALURGIA Y QUÍMICA

MODELACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE LOS PRODUCTOS DE LA MOLIENDA DEL MINERAL LATERÍTICO

Trabajo de Diploma en Opción al Título de Ingeniero en Metalurgia y Materiales

Victor Alfredo Quijano Arteaga

**Moa, 2018
“Año 60 de la Revolución”**





MINISTERIO DE EDUCACIÓN SUPERIOR
INSTITUTO SUPERIOR MINERO METALÚRGICO
“Dr. ANTONIO NÚÑEZ JIMÉNEZ”
FACULTAD DE METALURGIA Y ELECTROMECAÁNICA
DEPARTAMENTO DE METALURGIA Y QUÍMICA

MODELACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE LOS PRODUCTOS DE LA MOLIENDA DEL MINERAL LATERÍTICO

Trabajo de Diploma en opción al Título de Ingeniero en Metalurgia y Materiales

Autor: Víctor Alfredo Quijano Arteaga

Tutor: Prof. Tít. Ing. Alfredo Lázaro Coello Velázquez, Dr.

Moa, 2018
“Año 60 de la Revolución”



DECLARACIÓN DE AUTORÍA

Yo: Victor Alfredo Quijano Arteaga

Autor de este trabajo, certifico su propiedad intelectual a favor del Instituto Superior Minero Metalúrgico “Dr. Antonio Núñez Jiménez”, el cual podrá hacer uso del mismo con la finalidad que estime conveniente.

Victor Alfredo Quijano Arteaga
Velázquez

Autor

Dr. C Alfredo Lázaro Coello

Tutor

A mi madre

A mi tía

A mis hermanos

Agradecimientos:

A mi madre Fausta, a mi tía Fortunata, por la orientación y apoyo que me brindaron.

A mis hermanos Andy, Adriana y Deyvi, por siempre alentarme a seguir adelante.

A mi novia Rosibet M Chinchay Maldonado, por su invaluable apoyo y compañía, a pesar de los problemas.

A mi tutor Dr. C Alfredo L Coello Velázquez, por haber sido la fuente donde surgió este trabajo y por la confianza depositada en mí para la realización del mismo.

Al profesor Ms. C Mario Andrés Navarro Consuegra por su invaluable apoyo en la culminación de este trabajo.

A todo el colectivo de profesores del Departamento de Metalurgia-Química que de una u otra manera contribuyeron a mi formación como futuro profesional.

A mis compañeros y amigos que realmente me brindaron su apoyo incondicional en todos estos años.

A todos ellos: Muchas gracias

*“Nunca consideres al estudio como una obligación, sino
como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso
mundo del saber”*

Albert

Einstein

RESUMEN

Una de las formas de medir el rendimiento de los circuitos de trituración/molienda es en términos de reducción de tamaño, por lo que se hace necesario la medición de las distribuciones de tamaños de los productos del circuito. Existen numerosas funciones matemáticas para representar las distribuciones de tamaño, ejemplo de estas, son los modelos de Gaudin–Schuhmann, Rosin–Rammler y Swebrec. Considerando lo anterior, el objetivo del presente trabajo es proponer el modelo de distribución de tamaño de partículas, que mejor caracteriza la composición granulométrica de los productos de la molienda, a escala industrial, del mineral laterítico. Para dicho fin, se recalculó el contenido de las clases granulométricas mediante la determinación de la carga circulante óptima empleando el método propuesto por Coello, (2015); tras la obtención de los parámetros de los modelos de distribución se evaluó la dependencia, de estos, con respecto a las variables de operación y para valorar el grado de ajuste de los modelos se empleó el criterio estadístico de Cochran (C), la desviación o error estándar (σ) y el coeficiente de correlación R^2 . Los resultados muestran que, para el 40 % de carga de bolas, el modelo de mejor ajuste para la descarga del molino, es el modelo de Gaudin–Schuhmann, mientras que, para el producto recirculado y producto final, el modelo de Rosin–Rammler. Así mismo, para el 45 % de carga de bolas, el modelo de mayor ajuste, para la descarga del molino y el producto final, es el modelo de Rosin–Rammler y, para el producto recirculado, el modelo de Gaudin–Schuhmann.

Palabras claves:

Carga circulante, Función de Gaudin–Schuhmann, Función de Rosin–Rammler, Función Swebrec, Modelos de distribución.

ABSTRACT

One of the ways to measure the performance of crushing/milling circuits is in terms of size reduction, so it is necessary to measure the size distributions of the circuit products. There are numerous mathematical functions to represent size distributions, examples of these are the models of Gaudin–Schuhmann, Rosin–Rammler and Swebrec. Considering the above, the objective of this research was to propose the particle size distribution model, which best characterizes the granulometric composition of milling products, on an industrial scale, of laterite ore. For this purpose, the content of the granulometric classes was recalculated through the determination of optimal circulating load using the method proposed by Coello, (2015); After obtaining the parameters of the distribution models, the dependency of these parameters was evaluated with respect to the operation variables and to evaluate the degree of adjustment of the models, the Cochran statistical criterion (C), the deviation or standard error (σ) and the correlation coefficient R^2 . The results show that, for the 40% ball load, the best fit model for the discharge of the mill was the Gaudin–Schuhmann model, while for the recirculated product and final product, it was the Rosin–Rammler model. Likewise, for the 45% load of balls, the models of greater adjustment, for the discharge of the mill and the final product, was the model of Rosin-Rammler and, for the recirculated product, the model of Gaudin-Schuhmann.

Keywords:

Circulating charge, Distribution models, Gaudin–Schuhmann function, Rosin–Rammler function, Swebrec function.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I MARCO TEÓRICO	6
1.1 Aspectos generales del proceso de conminución	6
1.1.1 Fundamentos del proceso de molienda	8
1.2 Métodos de cálculo de la carga circulante	11
1.2.1 Método convencional	12
1.2.2 Método propuesto por Coello (2015)	14
1.3 Distribución de tamaño de partículas	18
1.3.1 Funciones de representación	20
1.3.1.1 Función de Gaudin – Schuhmann	21
1.3.1.2 Función de Rosin – Rammler	22
1.3.1.3 Función Swebrec	23
1.4 Antecedentes del trabajo.....	23
Conclusiones parciales	26
CAPÍTULO II MATERIALES Y MÉTODOS	27
2.1 Diseño de la investigación	27
2.2 Diseño experimental empleado en la realización de los ensayos (Coello-Velázquez, 1993a).....	28
2.3 Principales equipos e instrumentos empleados durante los ensayos (Coello-Velázquez, 1993a)	29
2.4 Materiales utilizados y sus características (Coello-Velázquez, 1993a).	30
2.5 Metodología para determinar la carga circulante.....	30
2.6 Metodología para la determinación de los parámetros de las funciones de distribución.	31
2.6.1 Función de Gaudin – Schuhmann.....	31
2.6.2 Función de Rosin - Rammler	32
2.6.3 Función Swebrec	33
2.7 Técnicas estadísticas para la validación de los modelos	35
2.7.1 Coeficiente de correlación R^2	35
2.7.2 Criterio de Cochran	35
2.7.3 Desviación o error estándar	36
Conclusiones parciales	36

CAPÍTULO III RESULTADOS Y DISCUSIÓN	37
3.1 Resultados del cálculo de la carga circulante.....	37
3.2 Resultados de la estimación y análisis de los parámetros de las funciones de distribución	41
3.3 Validación estadística de los modelos de distribución	60
Conclusiones parciales	73
CONCLUSIONES FINALES	74
RECOMENDACIONES	75
BIBLIOGRAFÍA	76
ANEXOS	81

INTRODUCCIÓN

A fin de superar la crisis en que se encuentra la industria del Níquel en Cuba, debido a la disminución gradual de la ley del metal (obstáculo impuesto por la misma naturaleza), a los costos de producción altos y al bajo precio del Níquel en el mercado mundial; distintos profesionales han desarrollado (o están desarrollando) diversos trabajos técnicos y/o de investigación, sobre todo, para disminuir los costos de producción y elevar la eficiencia de las diferentes secciones de la Empresa "Comandante Ernesto Che Guevara".

La investigación de la molienda ocupa un lugar relevante en el perfeccionamiento de la tecnología carbonato–amoniaco de los minerales lateríticos. En los últimos años, la molienda seca de los mencionados minerales ha sido objeto de estudio con el fin de profundizar en los complejos fenómenos que tienen lugar durante el proceso industrial y sus altos consumos energéticos (Coello-Velázquez, *et al.*, 2009).

La molienda es un proceso de reducción de tamaño con un consumo intenso de energía y se ha convertido en un indicador de la sostenibilidad de las plantas minero–metalúrgicas (Bush, 2013), puesto que, de todas las etapas de procesamiento genera costos de operación estimados entre el 40 a 50 % de los costos globales de la planta (Aldrich, 2013; Sayadi, *et al.*, 2014).

En el caso particular de la molienda de minerales lateríticos, se ha demostrado que el consumo de energía, solamente en esta operación, es aproximadamente del 21 % con respecto a los demás procesos involucrados en la tecnología carbonato amoniacal, siendo el segundo gran consumidor, después de la etapa de lixiviación (Laborde, *et al.*, 2003; Laborde, 2004).

De todas las etapas de procesamiento, la molienda es la más ineficiente, ya que emplea sólo el 1 % de la energía suministrada al molino como energía efectivamente utilizada para fracturar el mineral (Austin y Concha, 1994; Fuerstenau y Abouzeid, 2002). Por su parte, Beke, (1964) determina que el consumo de energía en la desintegración del mineral no sobrepasa el 0,6 %.

Lo anterior permite advertir que la etapa de molienda es determinante para establecer la eficiencia de las operaciones de la sección de molienda de la Empresa antes mencionada; cuyo esquema tecnológico incluye una operación de molienda en circuito cerrado con un separador de aire y dos etapas de precipitación de polvos en baterías de ciclones con un electro-filtro (Coello-Velázquez, 1993a).

En estos esquemas, el proceso de fragmentación se ve afectado no solo por las fluctuaciones de las propiedades físicas y físico-mecánicas del mineral en la alimentación, condiciones propias de operación, sino también por una gama de factores tecnológicos que incluyen la carga circulante (Coello-Velázquez, 2015).

Por otra parte, aunque los principales objetivos de un circuito de trituración/molienda sea alcanzar grados de liberación de minerales, cumplir condiciones de superficie específica o promover la manejabilidad (Coello-Velázquez, 1999; King, 2012), su rendimiento será expresado normalmente en términos de reducción de tamaño; por tanto, es necesario, medir las distribuciones de tamaño de la alimentación, producto final y, en ocasiones, de las corrientes intermedias del circuito (Napier-Munn, *et al.*, 2005).

Es útil, a menudo, representar las distribuciones de tamaño por medio de una función matemática, con el fin de representar gráficamente una curva uniforme racional a través de los puntos experimentales o para encapsular la distribución de tamaño en un menor número de parámetros ajustados, los que pueden utilizarse en otros cálculos como modelado y simulación (Napier-Munn, *et al.*, 2005). Las dos funciones de distribución de tamaño utilizadas comúnmente, para la caracterización de los materiales, son las funciones de Gaudin-Schuhmann y Rosin-Rammler (Napier-Munn, *et al.*, 2005; King, 2012; Gupta y Yan, 2016; Wills y Finch, 2016).

En contraste con la distribución de Gaudin-Schuhmann, la función de Rosin-Rammler, usualmente, es el que mejor se ajusta para un intervalo de tamaño de partículas gruesas, siendo su principal desventaja, apoyarse en una forma compleja de la función de distribución y por consiguiente la necesidad de coordenadas

especiales para su representación gráfica (Kelly y Spottiswood, 1982; Fuerstenau y Han, 2003).

Por su parte, Harris (1968 y 1971) propone el uso de la función de Rosin–Rammler, como la mejor función para describir las distribuciones de tamaño en el procesamiento de minerales. No obstante, en algunas aplicaciones la función de Gaudin–Schuhmann, es más utilizado que el método de Rosin–Rammler, este último, mayormente es empleado en el estudio de la preparación de carbón, para lo cual fue desarrollado originalmente (Wills y Finch, 2016).

Sin embargo, se pueden encontrar algunas formas funcionales que se ajustan razonablemente a los datos experimentales (Fuerstenau y Han, 2003). Una de ellas, es la función propuesta por Ouchterlony, (2003) denominada función Swebrec. Esta función ofrece un excelente ajuste para tamaños de partículas comprendidos entre 500 – 0,5 mm, con una bondad de ajuste promedio R^2 de $0,997 \pm 0,001$ (Ouchterlony, 2005 y 2010).

A pesar de la basta investigación desarrollada sobre la molienda del mineral laterítico, no se ha evaluado sistematización alguna de los modelos de distribución de tamaño mediante la identificación de los parámetros que lo caracterizan, y que faciliten su modelación y simulación. Este último constituye el **problema** de la presente **investigación**.

Objeto de estudio

La distribución de tamaño de los productos de molienda del mineral laterítico.

Campo de acción

Procedimientos y aspectos relacionados con la modelación de la composición granulométrica de los productos granulados.

Objetivo General

Proponer el modelo de distribución que mejor caracteriza la composición granulométrica de los productos de la molienda del mineral laterítico a escala

industrial mediante la evaluación del grado de ajuste de los diferentes modelos de representación de la distribución de tamaño, previo ajuste de los valores de los productos de la molienda mediante la determinación de la carga circulante.

Hipótesis

La identificación de los parámetros de los diferentes modelos de distribución y la evaluación de la calidad de ajuste de estos, mediante el empleo de las técnicas estadísticas, permitirá proponer el modelo que mejor caracteriza la composición granulométrica de los productos de la molienda del mineral laterítico, e incorporar una nueva herramienta en la modelación y simulación de los procesos de reducción de tamaño de dicho mineral.

Objetivos específicos

1. Determinar la carga circulante y los valores "ajustados" de los productos de la molienda.
2. Determinar los parámetros que caracterizan los diferentes modelos de distribución y analizar la dependencia de estos en función de las variables de operación, tales como: flujo de alimentación, gasto del flujo de aire y ángulo de inclinación de las paletas del separador de aire.
3. Evaluar mediante el empleo de las técnicas estadísticas, el grado de ajuste de los modelos de distribución y proponer, el modelo que mejor caracteriza la composición granulométrica de los productos de la molienda del mineral laterítico.

Tareas de la investigación

- Sistematización de los conocimientos relacionados con el objeto de estudio para la fundamentación y la elaboración del estado del arte (Capítulo I).
- Caracterización los principales métodos y materiales empleados para la obtención de los datos experimentales por Coello (1993a), y las técnicas y procedimientos propiamente empleados en el trabajo (Capítulo II).

- Determinación de los parámetros de los modelos de Gaudin–Schuhmann (1940), Rosin–Rammner (1933–34) y Swebrec (2003); y evaluación del grado de ajuste de dichos modelos mediante el tratamiento estadístico y finalmente, realizar la propuesta del modelo de distribución de tamaño que mejor caracteriza la composición granulométrica de los productos de la molienda del mineral laterítico (Capítulo III).

Métodos de investigación

Con el objetivo de darle solución a la problemática planteada en la investigación se utilizaron métodos teóricos y empíricos.

- Mediante el empleo de los métodos histórico – lógico e hipotético-deductivo, así como los procedimientos de análisis y síntesis, se realiza el estudio del estado del arte sobre la metodología de cálculo de la carga circulante, los modelos de distribución de tamaño más empleados y se exponen las concepciones teóricas del tema en cuestión (Capítulo I) que permiten fundamentar el marco metodológico de la investigación para la solución del problema formulado (Capítulo II).
- El empleo de los métodos empíricos, particularmente, los procedimientos específicos para la determinación de los parámetros de los modelos de distribución, así como el empleo de una hoja de cálculo (Microsoft Excel) en la determinación de los parámetros de las distribuciones de tamaño y las técnicas estadísticas, permitieron la evaluación del grado de ajuste de los modelos de distribución de tamaño de los productos de la molienda del mineral investigado.
- Los métodos de análisis y síntesis e hipotético–deductivo permitieron el análisis y discusión de los resultados (Capítulo III), y la formulación de las conclusiones del trabajo.

CAPÍTULO I MARCO TEÓRICO

En el presente capítulo, con el propósito de adquirir los elementos claves y las tendencias actuales para el desarrollo del trabajo, se exponen: las consideraciones teóricas del proceso de conminución, en especial, sobre el proceso de molienda, la metodología de cálculo de la carga circulante, la conceptualización de los diferentes modelos (funciones) de distribución de tamaño de partículas. Además, se realiza un análisis de los trabajos relacionados con la temática.

Los objetivos del presente capítulo son:

- Exponer los fundamentos teóricos sobre el proceso de conminución, el cálculo de la carga circulante y las funciones (modelos) de distribución de tamaño de partículas.
- Realizar un análisis de los trabajos precedentes a la temática de investigación.

1.1 Aspectos generales del proceso de conminución

La conminución es un término genérico que se utiliza para designar procesos, que incluyen todas las operaciones de reducción de tamaño (Austin & Concha, 1994). Los objetivos de la conminución son: liberar las especies minerales valiosas de los estériles, incrementar el área de la superficie de contacto y producir partículas (de mineral o roca) de tamaño y forma requeridos (Lynch, 1980; Coello, 1999; Fuerstenau y Han, 2003; King, 2012; Gupta y Yan, 2016; Wills y Finch, 2016).

La conminución es una operación importante en las industrias minera, metalúrgica, de energía, farmacéutica, alimenticia y química; pero la ciencia básica involucrada en esta, es la mecánica de fractura, debido a que los minerales son materiales cristalinos que se unen por enlaces químicos o fuerzas físicas y poseen gran cantidad de defectos en su estructura.

Para lograr una reducción de tamaño de las partículas sólidas (mineral), se les debe aplicar esfuerzos y producir fractura. El material sometido a un esfuerzo sufre una deformación, que según su comportamiento pueden ser elásticos o inelásticos (Austin y Concha, 1994).

El comportamiento elástico de un material se caracteriza porque la respuesta a los esfuerzos es afectada sólo por el esfuerzo presente. No existen efectos de memoria que comprometan la respuesta posterior del material. La energía acumulada durante la carga del sólido es recuperada íntegra e instantáneamente durante la descarga (Austin y Concha, 1994).

Existen materiales cuya respuesta a una sollicitación es no elástica. La razón puede ser que el material se deforma permanentemente o que su comportamiento depende del tiempo. Ambos disipan energía durante la deformación. Se pueden distinguir dos tipos de inelasticidad: el comportamiento plástico y el comportamiento viscoso. Estos tipos de inelasticidad se superponen al comportamiento elástico y constituyen lo que se denomina comportamiento elasto-plástico y comportamiento visco-elástico (Austin y Concha, 1994).

El comportamiento elasto-plástico lleva a una deformación permanente del material, que no desaparece con el tiempo, por lo que es tratada de manera independiente. El comportamiento visco-elástico se caracteriza por su gran dependencia de la velocidad con que se lleva a efecto. Mientras más lenta la carga, más inelásticamente se comporta el material.

Los mecanismos de conminución que se aplican en los equipos actuales siguen siendo la compresión y el impacto, aunque se ha demostrado que ellos son extraordinariamente ineficientes (Napier-Munn, et al., 2005; Wills y Finch, 2016). Ante la aplicación de estas fuerzas, los minerales generalmente se fracturan debido a:

- Los defectos que poseen.
- La formación de grietas y micro-grietas durante el minado y manejo previo.
- Su composición mineralógica, es decir, por estar constituido por especies diseminadas de diferente comportamiento mecánico.

Todas estas heterogeneidades, actúan como concentradores de esfuerzo, que conllevan a que el mineral se comporte como un material completamente frágil, cuya resistencia mecánica es función de las características de estas heterogeneidades (Napier-Munn, et al., 2005).

El tipo de fractura producido en un mineral depende principalmente del tipo de esfuerzo aplicado. En la conminución, los esfuerzos normales (tracción y compresión) son más importantes como forma de aplicación de fuerzas para la ruptura de los minerales, sin embargo, la importancia relativa del cizalle dependerá de la magnitud de las sollicitaciones a la que es sometido el material (Austin y Concha, 1994). Dependiendo de la forma de aplicación de la carga y de la mecánica de la fractura de las partículas, se obtendrá un tipo de fractura característico:

- Rotura por abrasión (esfuerzos localizados).
- Fractura por clivaje (compresión).
- Estallido (impacto).

Obviamente, una compresión o tensión desigual a través de un sólido debe producir esfuerzos de cizalle.

Finalmente, la energía requerida para fracturar una partícula disminuye ante la presencia de agua u otro líquido, ya que este puede ser absorbido por las partículas hasta llenar las grietas u otros macro-defectos. La fuerza aplicada sobre el líquido aumenta considerablemente su presión y esta se concentra en los defectos y puntas de grieta (Napier-Munn, *et al.*, 2005).

1.1.1 Fundamentos del proceso de molienda

La molienda es la última etapa de las operaciones de reducción de tamaño (Coello-Velázquez, 1999), es decir, es la reducción de tamaño de las partículas relativamente gruesas dejadas por la trituración. Además, la molienda es una operación unitaria que reduce el volumen de las partículas de una muestra sólida.

A la molienda le corresponde el mayor peso en la liberación de los componentes útiles de las menas, por esta razón la calidad del producto final, la eficiencia de la separación y la obtención de altos índices cualitativo-cuantitativos del beneficio dependen de la molienda; la eficiencia de la molienda es precisamente la clave del éxito de la separación de los minerales.

Una molienda que no garantice el grado de liberación necesario, trae consigo bajas recuperaciones en el beneficio, bajos contenidos del componente útil en el

concentrado y cuantiosas pérdidas del componente valioso en las colas; la remolienda del mineral implica además un consumo innecesario de energía.

La reducción del componente útil por debajo del tamaño necesario, provoca pérdidas de éste; por otra parte, cuando se sobre-reduce la ganga, se producen las lamas secundarias, las cuales tienen un efecto muy negativo en los índices de la separación.

La reducción de tamaño se lleva a cabo dividiendo o fraccionando la muestra por medios mecánicos hasta el tamaño deseado. En este proceso la partícula mineral se fragmenta ya que la acción del cuerpo molidor supera las fuerzas de cohesión interna de la red cristalina de material.

En la reducción de tamaño de las partículas sólidas con un elevado control se utilizan los molinos de bolas. Estos equipos llevan a cabo la mayor parte de la fragmentación con la combinación de dos mecanismos fundamentales: la abrasión y el impacto (Álvarez, 2010), aunque durante el proceso de desmenuzamiento también está presente, en una menor medida, el mecanismo de compresión, el cual genera una fractura por clivaje.

Los mecanismos de conminución, ya sea la compresión, la abrasión o el impacto del tamaño de las partículas minerales son prácticamente los mismos independientemente del tipo de cuerpos moledores empleados, aunque el predominio de uno u otro, es el resultado del tipo de medio, el tipo de revestimiento y la velocidad de rotación del molino (Wills y Napier-Munn, 2006; Wills y Finch, 2016).

Un elemento de vital importancia en la operación del molino es la velocidad de rotación del tambor del molino. A partir de esta concepción se puede decir que la fuerza principal de molino se transmite a los cuerpos moledores a través del revestimiento (Wills y Finch, 2016). Si el molino se opera con una velocidad relativamente pequeña, o un revestimiento liso, hace que la carga de bolas se deslice lentamente a una baja altura, para luego resbalar sobre las paredes del tambor, al mismo tiempo, las capas de bolas resbalan unas sobre otras, favoreciendo que prevalezca el mecanismo de abrasión o fricción.

A este régimen de trabajo se le conoce como régimen de cascada, figura 1, que produce un material más fino y, en consecuencia, aparece una mayor cantidad de lamas en el producto molido y un mayor desgaste en el revestimiento del molino. El ulterior aumento de la velocidad de rotación del tambor trae consigo que las cargas de bolas bajo la acción de las fuerzas centrífugas se eleven hasta una altura mayor y al alcanzar el punto de equilibrio dinámico, caen describiendo trayectorias parabólicas (régimen de catarata), en este caso, el mecanismo que prevalece es el de impacto.

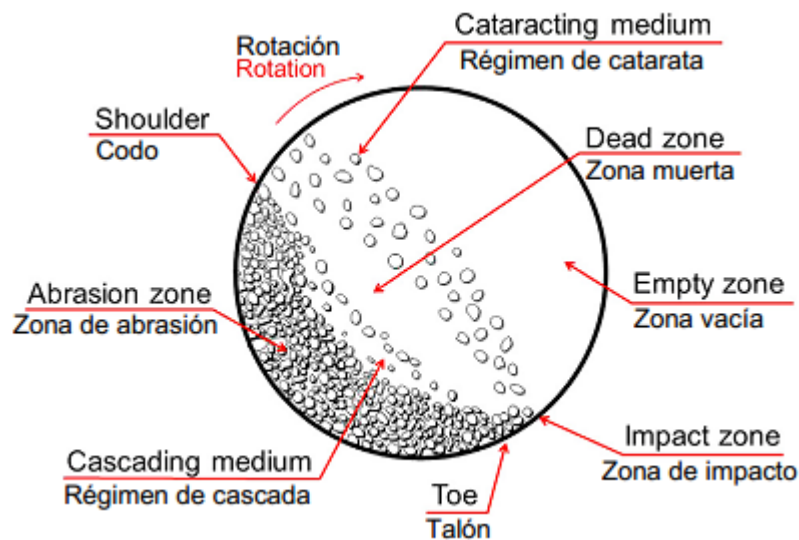


Figura 1 Movimiento de la carga y régimen de trabajo de los molinos de volteo.
Fuente: Wills y Finch (2016)

Sin embargo, cuando la velocidad de rotación del tambor del molino alcanza la velocidad crítica, se produce la centrifugación y el medio moledor se lleva a una posición esencialmente fija contra el tambor. La velocidad crítica del molino se produce cuando la fuerza centrífuga supera a la fuerza de gravedad, es decir, las bolas abandonan su trayectoria circular. Esto trae consigo un aumento de la energía demandada (potencia, kWh/t) por el molino, sin que se produzca un aumento significativo en la reducción de tamaño de las partículas sólidas (Wills y Finch, 2016).

Pourghahramani (2012) expresa que en los molinos donde prevalece el mecanismo de impacto, se produce una fractura masiva, que conllevan a la aparición de partículas irregulares y alargadas que luego son redondeadas por el mecanismo de

fricción. Por su parte, Austin, *et al.*, (1987) plantea que, el rendimiento está notablemente influenciado por las condiciones de operación (revestimiento del molino, la rejilla) y las características propias del mineral.

Los cambios en la composición mineralógica y en las propiedades físicas de la alimentación pueden influir en la variación de las condiciones óptimas de operación (Alatola, 2011), como también en los cambios de los productos que recirculan al molino (carga circulante).

1.2 Métodos de cálculo de la carga circulante

La carga circulante, por concepto, es la relación porcentual de la cantidad de mineral que retorna al molino para su remolienda (arenas del separador de aire) y la alimentación fresca al molino (Coello-Velázquez, 2015).

Existe un elemento de mitología sobre la carga circulante, debido a que, una carga muy alta tenderá a acarrear a las partículas gruesas hacia afuera del molino, donde pueden causar serios problemas de desgaste. Por esta razón, para describir los cambios en la separación de la masa de partículas en el separador en función de las condiciones de operación, es necesario poder cuantificar la clasificación (Napier-Munn, *et al.*, 2005); es decir, en un circuito cerrado de molienda, la influencia de la carga circulante está marcada por la incidencia en los niveles de acumulación de material en el interior del molino, sobre el rendimiento de este y sus indicadores energo–tecnológicos (Coello-Velázquez, 2015).

Sin embargo, es importante tener en cuenta que la carga circulante se establece por la magnitud de la diferencia en distribución de tamaño, entre el producto y la alimentación del clasificador. En consecuencia, la carga de circulación óptima proporcionará un adecuado compromiso entre la remolienda y la minimización de las partículas gruesas en la descarga del molino. Esto significa, en la práctica, emparejar el tamaño de corte del clasificador con el tamaño de producto del molino.

La única manera práctica de encontrar este “mejor” punto, es con el empleo de un método de cálculo bien diseñado. Una vez que se ha establecido esta “mejor carga circulante” (más adecuado, mejor rendimiento volumétrico del molino), puede ser

utilizada como un sistema de control objetivo y ajustar la tasa de alimentación del circuito (Napier-Munn, *et al.*, 2005).

1.2.1 Método convencional

Cualquiera que sea la naturaleza de la clasificación, como del equipo en se efectúa, el proceso de separación por tamaños se puede representar mediante el esquema de la figura 2, donde se muestra un circuito cerrado de molienda–clasificación.

En un circuito cerrado de molienda, la acumulación de material en el interior del molino, sin ser una suma exacta de la productividad inicial y la carga circulante, define el desarrollo del proceso no solo en el orden cualitativo, sino también cuantitativo (Coello-Velázquez, *et al.*, 1994). Así que la calidad y cantidad del producto final es función de dicha variable. Para garantizar los niveles máximos de la productividad del producto molido es necesario mantener los niveles de acumulación en valores cercanos al valor crítico.

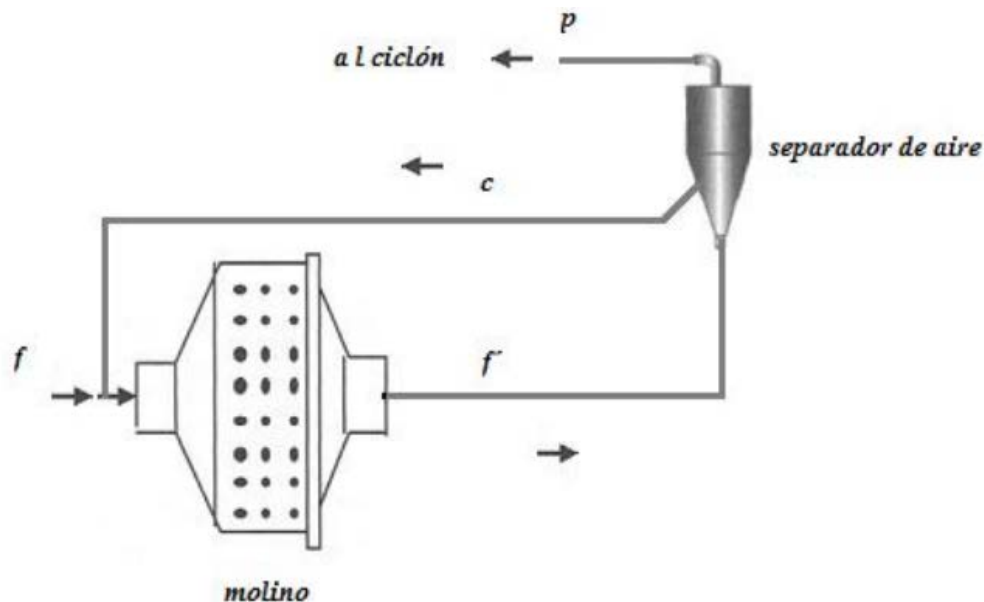


Figura 2 Circuito cerrado de molienda–clasificación. Fuente: Coello (1993a)

Wills y Napier-Munn (2006) plantearon que, probablemente, son las fluctuaciones de la densidad y la dureza en el mineral alimentado son los que con mayor fuerza influyen en el balance de clases de la molienda. Para el caso específico de la molienda de los minerales lateríticos de Moa, Coello, *et al.* (2008) establecieron que

la relación serpentina/limonita influye decisivamente en el rendimiento y la distribución de las clases en el balance del molino.

Comúnmente, en la práctica industrial, la carga circulante se calcula a partir de los resultados del muestreo de la descarga del molino y los productos del clasificador, según:

$$C = \frac{f' - p}{c - f'} \quad (1)$$

donde

C: carga circulante, unidades.

f' , c y p : porcentaje en peso de la clase i en la descarga del molino, retorno del separador y producto final, respectivamente.

No siempre los cálculos por la ecuación (1) pueden ser considerados como válidos, en la mayoría de los casos están sujetos a errores graves, casuales y sistemáticos que tienen lugar durante el muestro; es decir, en los valores de las variables f' , c y p se resumen los errores que se cometen en las operaciones de tratamiento de las muestras, de su análisis (granulométrico en este caso), los errores en la toma de muestras y las fluctuaciones en la alimentación.

Wills y Finch, (2016), para resolver estos problemas en el balance material de las operaciones de beneficio de minerales, aplicaron el multiplicador de Lagrange para optimizar los residuos. El procedimiento expuesto por los autores antes citados, en su sentido expreso, es aplicable a los circuitos abiertos de trituración o molienda con cribado o clasificación preliminar para la determinación de los flujos de los productos, no siendo así para los circuitos cerrados, donde el balance material de clases es un tanto diferente.

Para el circuito abierto la ecuación principal del balance material de cualquier instalación se rige por la ecuación:

$$f - Pp - (1 - P)c = 0 \quad (2)$$

donde:

f , c y p : porcentaje en peso de la clase i en la alimentación fresca del molino, retorno del separador y producto final, respectivamente.

P : flujo del producto final.

La ecuación (2), es para el cálculo del balance material en operaciones de separación mecánica en condiciones de "estado de equilibrio del proceso", considerando que el error del cierre del balance es igual a cero. Al adecuar esta ecuación a un esquema de circuito cerrado de molienda es obvio que los parámetros cambian su concepto, es decir, se sustituye el contenido de los componentes útiles (f , c y p) por el contenido de las clases granulométricas.

Por otra parte, como F' (alimentación a la operación de clasificación) es la suma de la alimentación fresca en el molino (F) y la recirculación al molino (carga circulante), por tanto, la alimentación fresca no es precisamente la suma de los productos del esquema, sino que es igual a P (flujo del producto final). Esto hace que no sea posible emplear directamente la ecuación (2) en el cálculo del esquema de la figura 2.

1.2.2 Método propuesto por Coello (2015)

El método considera el cálculo de la carga circulante en un circuito cerrado de molienda a partir de los datos experimentales, resultantes del muestreo en los puntos de descarga del molino (f'), y en el reboso del clasificador (p) y en sus arenas (c), para luego ajustar la data a los valores estimados de la carga circulante.

El balance material de los procesos de reducción de tamaño está formado por dos ecuaciones básicas: la ecuación de salida de los productos y la ecuación de contenido de las clases. Para la instalación de la figura 2 el balance material, considerando la ley de conservación de la masa ($\epsilon = 0$), toma la siguiente forma:

$$\begin{cases} F' = P + C & \text{para } \epsilon = 0 \\ F'f' = Pp + Cc & \text{para } \epsilon = 0 \\ F = 1 & \text{para } C = \text{ctte} \\ F = P & \text{para } C = \text{ctte} \end{cases} \quad (3)$$

En consecuencia:

$$f'(P + C) = Pp + Cc \quad (4)$$

$$f'(1 + C) = p + Cc \quad (5)$$

donde

F, F', P y C: son los rendimientos (salidas) de los flujos de alimentación fresca, descarga del molino, producto fino y retorno al molino (carga circulante) relativos a la alimentación fresca, unidades.

ϵ : es el residuo o error.

De la ecuación (5) se obtiene la ecuación de la distribución de las clases de tamaño de la instalación:

$$f' = p - C(f' - c) \quad (6)$$

La ecuación es válida solo si el error o residuo es igual a cero ($\epsilon = 0$), lo cual es inadmisibles en términos experimentales, por lo tanto:

$$\epsilon = f' - p + C(f' - c) \quad (7)$$

El objetivo del método es encontrar el valor de la carga circulante que minimiza la suma de los cuadrados de los residuos de cada parámetro en la ecuación (7), entonces:

$$S = \sum_{i=1}^n \epsilon^2 \quad (8)$$

Sustituyendo la ecuación (7) en la (8) se tiene:

$$S = \sum_{i=1}^n (f' - p + C(f' - c))^2 \quad (9)$$

Resolviendo convenientemente:

$$S = \sum_{i=1}^n (f' - p)^2 + 2C \sum_{i=1}^n (f' - p)(f' - c) + C^2 \sum_{i=1}^n (f' - c)^2 \quad (10)$$

De la ecuación (10) se deduce que, para cualquier valor de C , la función S es igual a cero solo para la condición en que los valores de sus parámetros f' , p y c sean coherentes. No obstante, la función S tiene su mínimo si su primera derivada es igual a cero, por lo tanto, el valor de C para esta condición, minimiza los residuos.

$$\frac{dS}{dC} = 2 \sum_{i=1}^n (f' - p)(f' - c) + 2\dot{C} \sum_{i=1}^n (f' - c)^2 = 0 \quad (11)$$

Entonces, el valor de $\dot{C}$ que minimiza ($\epsilon \rightarrow \min$) se puede calcular mediante:

$$\dot{C} = \frac{\sum_{i=1}^n (p - f')(f' - c)}{\sum_{i=1}^n (f' - c)^2} \quad (12)$$

El cálculo de los valores de los parámetros de la ecuación (12) que satisfacen el mejor ajuste de $\dot{C}$, se realiza a partir de reescribir la ecuación (6) de la siguiente forma:

$$\epsilon = f'(1 + \dot{C}) - p - \dot{C}c \quad (13)$$

Escribiendo la ecuación (13) en función de los parámetros de la carga circulante reajustada ($\dot{C}$) por la fórmula (12):

$$f'_r(1 + \dot{C}) - p_r - \dot{C}c_r = 0 \quad (14)$$

Si restamos la ecuación (13) y la (14) se obtiene:

$$\epsilon = (f' - f'_r)(1 + \dot{C}) - (p - p_r) - \dot{C}(c - c_r) \quad (15)$$

Entonces:

$$f' - f'_r = \epsilon_{f'} \quad (16)$$

$$p - p_r = \epsilon_p \quad (17)$$

$$c - c_r = \epsilon_c \quad (18)$$

donde:

f'_r , c_r y p_r : porcentaje en peso ajustado de la clase i en la descarga del molino, retorno del separador y producto final, respectivamente.

$\epsilon_{f'}$, ϵ_c y ϵ_p : residuos de la clase i en la descarga del molino, retorno del separador y producto final, respectivamente.

Sustituyendo las ecuaciones (16), (17) y (18) en la (15) se obtiene:

$$\epsilon = \epsilon_{f'}(1 + \dot{C}) - \epsilon_p - \dot{C}\epsilon_c \quad (19)$$

Para la ecuación (15), la suma de los cuadrados que hace mínimo cada parámetro, toma la siguiente forma:

$$S_r = \sum_{i=1}^n \epsilon_{f'}^2 + \epsilon_p^2 + \epsilon_c^2 \quad (20)$$

De acuerdo con Boizán (1984), la función de Lagrange o lagrangiana (ecuación 21) puede ser utilizada para la determinación de las posibles localizaciones del óptimo (máximo o mínimo). Wills y Napier-Munn (2006) aseguraron que los problemas de minimización de los errores pueden ser resueltos con el método de Lagrange.

$$G = S_r + \sum_j \lambda_j R(x) \quad (21)$$

donde

G : es la función de Lagrange.

λ : es el multiplicador de Lagrange.

$R(x)$: es la restricción.

En este caso particular, la ecuación (22) es la sustracción de la restricción formada por la ecuación (19):

$$\epsilon - \epsilon_{f'}(1 + \dot{C}) + \epsilon_p + \dot{C}\epsilon_c = 0 \quad (22)$$

Entonces, para el caso en cuestión la función de Lagrange toma la siguiente forma:

$$G = \sum_{i=1}^n \epsilon_{f'}^2 + \epsilon_p^2 + \epsilon_c^2 + 2 \sum_i \lambda (\epsilon - \epsilon_{f'}(1 + \dot{C}) + \epsilon_p + \dot{C}\epsilon_c) \quad (23)$$

Para determinar el valor de los residuos $\epsilon_{f'}$, ϵ_p y ϵ_c basta con derivar e igualar a cero la ecuación (23) para cada uno de ellos:

$$\frac{dG}{d\epsilon_{f'}} = 2\epsilon_{f'} - 2\lambda(1 + \dot{C}) = 0$$

$$\epsilon_{f'} = \lambda(1 + \dot{C}) \quad (24)$$

$$\frac{dG}{d\epsilon_p} = 2\epsilon_p + 2\lambda = 0$$

$$\epsilon_p = -\lambda \quad (25)$$

$$\frac{dG}{d\epsilon_c} = 2\epsilon_c + 2\lambda\dot{C} = 0$$

$$\epsilon_c = -\lambda\dot{C} \quad (26)$$

Dado que el valor de λ se desconoce, al derivar la ecuación (23) por el mismo e igualar a cero, y sustituyendo las ecuaciones (24), (25) y (26) se obtiene:

$$\frac{dG}{d\lambda} = 2(\epsilon - \lambda(1 + \dot{C})^2 - \lambda - \lambda\dot{C}^2) = 0$$

$$\lambda = \frac{\epsilon}{(1 + \dot{C})^2 + 1 + \dot{C}^2} \quad (27)$$

El valor de ϵ se determina por la ecuación (13).

1.3 Distribución de tamaño de partículas

El análisis de la distribución de tamaño se utiliza sobre todo para obtener datos cuantitativos sobre la distribución dimensional individual de partículas en los flujos de un circuito de molienda (trituration). Esto es importante para conocer en todo momento la calidad de la molienda, tamaño óptimo de la alimentación en procesos de máxima eficacia, etc.

El análisis de la distribución de tamaños de un producto molido consiste en registrar el porcentaje en peso del pasante acumulado en cada tamiz de una serie dada. Es muy importante conocer la distribución de tamaños de la muestra de mineral a

estudiar; para ello se somete a un proceso de tamizado o análisis de tamaños (Wills y Finch, 2016), este se realiza haciendo pasar una cantidad conocida de material a través de una serie de tamices con abertura de malla cada vez más pequeña.

El material que queda entre dos tamices consecutivos se pesa para, posteriormente, calcular el porcentaje en peso de cada fracción de tamaño. La escala usual de tamices estándar (Austin y Concha, 1994; Fuerstenau y Han, 2003) consiste en una serie de tamices con aberturas diferenciadas por $\sqrt{2}$, basada sobre un tamiz de 200 mallas de abertura igual a 74,2 μm .

Existen muchas formas de registrar los resultados, el más común es representar gráficamente el pasante acumulado en porcentaje en función del tamaño de partícula, figura 3. Esto puede hacerse en escala cartesiana–cartesiana, pero tiene la desventaja de que los puntos en la región de los finos tiendan a congestionarse; para evitarlo, se realiza el cambio de escala a logaritmo–cartesiana (Álvarez, 2010).

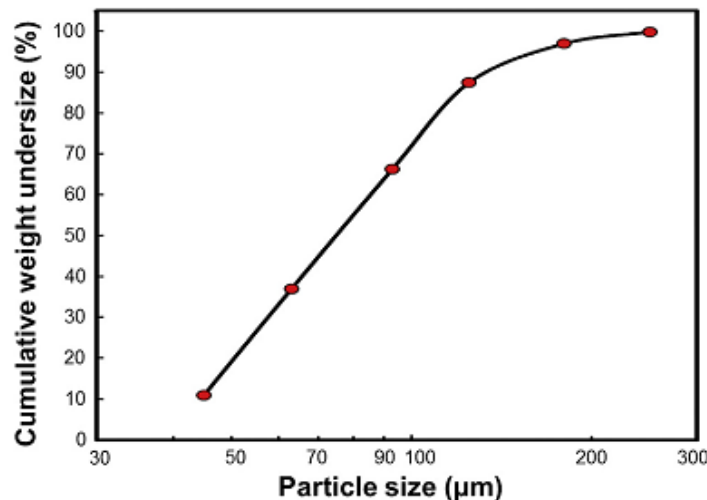


Figura 3 Ejemplo de la representación gráfica de un proceso de tamizado. Fuente: Wills y Finch, (2016)

Si se comparan varias curvas del porcentaje de pasante acumulado en función de tamaño de partícula, estas tienen forma sinusoidal, lo que origina diagramas congestionados en los extremos de la gráfica. Se conoce más de una docena de métodos de graficar para obtener la ordenada. Los métodos se diferencian en un

cambio de escala que hace que se expandan unas zonas y se contraigan otras, figura 4.

Es útil, a menudo, representar las distribuciones de tamaño por medio de una función matemática (modelo), con el fin de representar gráficamente una curva uniforme racional a través de los puntos experimentales o para encapsular la distribución de tamaño en un menor número de parámetros ajustados, los que pueden utilizarse en otros cálculos como modelado y simulación (Napier-Munn, *et al.*, 2005).

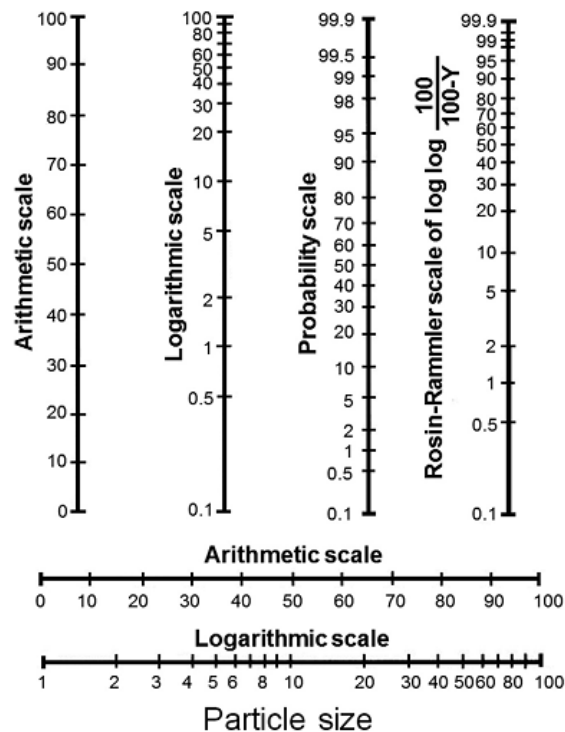


Figura 4 Comparación de las escalas de representación. Fuente: Wills y Finch, (2016)

1.3.1 Funciones de representación

Las dos funciones de distribución de tamaño usadas comúnmente, para la caracterización de los materiales, son las funciones de Gaudin–Schuhmann y Rosin–Rammler (Napier-Munn, *et al.*, 2005; King, 2012; Gupta y Yan, 2016; Wills y Finch, 2016). Sin embargo, se pueden encontrar algunas formas funcionales que se ajustan razonablemente a los datos experimentales (Fuerstenau y Han, 2003). Una de ellas, es la función propuesta por Ouchterlony (2003), denominada función Swebrec.

1.3.1.1 Función de Gaudin – Schuhmann

La función de Gaudin – Schuhmann es la distribución más utilizada en América para representar las distribuciones de tamaño obtenidas por tamizaje, y viene dada por:

$$P(x) = 100 \times \left(\frac{x}{k}\right)^m \quad (28)$$

donde

$P(x)$: pasante acumulado para un tamaño x , %.

x : tamaño de la partícula, unidades.

k : módulo de tamaño de Gaudin – Schuhmann para el cual $P(x)$ es igual al 100 %.

m : módulo de distribución de Gaudin – Schuhmann.

Despejando convenientemente y tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación (28) se obtiene:

$$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = m \log x - m \log k \quad (29)$$

Como m y k son constantes, es natural que la gráfica de $\log(P(x)/100)$ en función de $\log x$ sea una línea recta de pendiente m e intercepto $m \log k$. Además, cuando $P(x) = 100$ %, $x = k$. Estos dos parámetros caracterizan el tamaño de la muestra.

El significado físico de la constante “ m ” y su importancia de su interpretación en la distribución de tamaños fue indicado por Schuhmann (1940). Por otra parte, la constante “ k ” tiene dimensiones de tamaño de partícula.

Esta recta representada en una escala log–log, expande considerablemente la región por debajo del 50 % del pasante acumulado, especialmente por debajo del 25 %, sin embargo, se contrae severamente por encima de la región del 50 % y especialmente del 75 %, representando su mayor desventaja (Napier-Munn, *et al.*, 2005; Álvarez, 2010; Wills y Finch, 2016).

En algunos casos, en la función de Gaudin – Schuhmann, la distribución granulométrica aparece sesgada y se puede obtener una representación lineal de la misma trazando el logaritmo del porcentaje del pasante acumulado en función del tamaño de partícula. La ventaja de tales representaciones gráficas es que con un número limitado de tamices se puede calcular el tamaño de las partículas que se encuentran entre dos tamaños de tamices y obtener la distribución completa del tamaño de las partículas que existen en una muestra.

1.3.1.2 Función de Rosin – Rammler

La función de Rosin – Rammler es la distribución más utilizada en Europa para representar el porcentaje del pasante acumulado en función del tamaño de partícula, y se representa mediante:

$$P(x) = 100 \times \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^n}\right) \quad (30)$$

donde

$P(x)$: pasante acumulado para un tamaño x , %.

x : tamaño de la partícula, unidades.

a : módulo de tamaño de Rosin–Rammler para el cual $P(x)$ es igual al 63,2 %.

n : módulo de distribución de Rosin–Rammler.

Despejando convenientemente y tomando dos veces logaritmo natural en ambos miembros de la ecuación (30) se obtiene:

$$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = n \ln x - n \ln a \quad (31)$$

Los parámetros n y a se obtienen de la pendiente de la línea recta y de la intersección de esta con el eje horizontal correspondiente a $P(x) = 63,2$ %, respectivamente, al representar el $\ln\left(\ln\left(100/(100 - P(x))\right)\right)$ en función del $\ln x$. Ambas constantes completan la descripción de la distribución de tamaños de la muestra

La representación gráfica de la función de Rosin – Rammler se expande en las regiones por debajo del 25 % y por encima del 75 %, y se contrae en la región comprendida entre el 30 y el 60 % del pasante acumulado. Sin embargo, se ha demostrado que esta contracción es insuficiente para causar efectos adversos en la representación de la distribución de tamaño (Napier-Munn, *et al.*, 2005; Álvarez, 2010; Wills y Finch, 2016).

1.3.1.3 Función Swebrec

La función Swebrec, ecuación (32), propuesta por Ouchterlony (2003), es una función de distribución acumulativa que toma cualquier valor entre 0 – 100 %. La función ofrece un excelente ajuste para tamaños de partículas comprendidos entre 500 – 0,5 mm, con una bondad de ajuste promedio R^2 de $0,997 \pm 0,001$; y cuando $x = x_{\max}$, $P(x) = 100 \%$ y $x = x_{50}$, $P(x) = 50 \%$ (Ouchterlony, 2005 y 2010).

$$P(x) = 100 \times \left\{ \frac{1}{1 + \left[\frac{\ln\left(\frac{x_{\max}}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x_{\max}}{x_{50}}\right)} \right]^b} \right\} \quad (32)$$

donde

$P(x)$: pasante acumulado para un tamaño x , %.

x : tamaño de la partícula, unidades.

$x_{\max}$: tamaño de partícula límite para el cual $P(x)$ es igual al 100 %.

x_{50} : tamaño de partícula media para el cual $P(x)$ es igual al 50 %.

b : parámetro de ondulación de la función Swebrec.

1.4 Antecedentes del trabajo

La investigación de la molienda ocupa un lugar relevante en el perfeccionamiento de la tecnología carbonato amoniacal de los minerales lateríticos. En las últimas décadas la molienda seca de los mencionados minerales ha sido objeto de estudio

con el fin de profundizar en los complejos fenómenos que tienen lugar durante el proceso industrial y sus altos consumos energéticos (Coello-Velázquez, *et al.*, 2009).

Coello, (1993a y b), demuestra un vasto conocimiento referido al proceso de molienda por vía seca de los minerales lateríticos. Deja claro que el proceso se ve afectado por una serie de fenómenos y transformaciones físicas y físico-químicos, entre los cuales se pueden citar, la agregación y desintegración de conglomerados, la variación de la dureza del mineral en un amplio diapasón, así como su densidad. En estos trabajos, se evidencia que la composición granulométrica del alimentado así como la carga de bolas tienen una gran influencia sobre los principales indicadores del proceso de molienda.

Coello, *et al.* (1994), obtuvieron un modelo matemático-estadístico que les permitió confirmar sobre la base de sus cálculos, que el aumento de la carga de bolas de 45–50 % produce un incremento abrupto del consumo específico de energía por la clase nuevamente formada a costa del aumento de la energía total consumida por el molino, sin que esto represente un incremento sensible del contenido de la clase – 0,074 mm, por esta razón se sostiene la hipótesis de que la carga óptima debe estar en el intervalo 40–45 %. La optimización de la carga de bolas en este rango pasa a ser una de las formas más viables para lograr la molienda de estos minerales. La evaluación de la influencia de la carga de mineral sobre la energía consumida por el motor resultó muy débil.

Coello, (1993a) y Coello y Tijonov, (1996) consideran a la laterita como un mineral multicomponente, y demuestran la influencia de la relación serpentina/limonita en el comportamiento de la composición granulométrica del producto, de cada una de estas fracciones molidas por separado y en su conjunto, lo que confirma lo planeado por Coello, (1993b) sobre la conservación de la regularidades individuales de las fracciones constituyentes de la mena. El estudio de la influencia, de estas relaciones, en el Índice de Bond y las funciones selección y fractura fueron realizadas por Coello, *et al.* (2008).

Llorente, (2003) sugiere el empleo de un esquema de clasificación previa para separar las partículas finas en el alimentado, bajo el concepto de no moler nada de más (evitar la sobremolienda). Además, la presencia de finos en la alimentación puede disminuir la magnitud de los indicadores de la molienda.

Taşdemir A y Taşdemir T, (2009) caracterizan el estudio de la distribución de tamaño de partículas de los productos de la conminución de minerales de cromita, de diferente composición mineralógica, aplicando diferentes modos de fractura (diferentes equipos de conminución). Sus resultados muestran que el modelo de Gaudin – Schuhmann, es el que mejor describe la distribución de los productos de la conminución en trituradoras de mandíbula y de cono; mientras que, para la conminución en trituradoras de martillos y molinos de bolas, el modelo que mejor describe el comportamiento de la distribución de los productos es el modelo de Rosin – Rammler. Sin embargo, los resultados de los análisis de regresión lineal, afirman que es más conveniente y provechoso la aplicación del modelo de Gaudin – Schuhmann en términos de coeficientes de correlación para la conminución de las muestras en trituradoras de martillos y molinos de bola.

Álvarez, (2009 y 2010) realiza el análisis de la influencia de los modelos de distribución de tamaños de partículas, para trece minerales diferentes, en la determinación de consumos energéticos de la molienda mediante el método de Bond. Según, la autora, el modelo de distribución que menores errores produce y más se acerca a los valores obtenidos del Índice de Bond, es la representación en escala cartesiana–cartesiana.

Más tarde, Álvarez, *et al.* (2016), con análisis más rigurosos, refutan la afirmación anterior, y proponen emplear el modelo de Rosin–Rammler, puesto que este muestra un menor error de reproducibilidad en la representación de las distribuciones de tamaño de los productos molidos y una diferencia menor del 4 % entre el índice de trabajo determinado y el de referencia.

Galindo, (2016) para la determinación de los consumos energéticos de la molienda del mineral laterítico, el carbón antracita y de sus mezclas, analiza la distribución de

tamaño de la molienda de los minerales por separado y sus mezclas. Entre sus principales resultados reporta que la distribución de tamaño del carbón antracita responde al modelo de Gaudin – Schuhmann; mientras que, la distribución granulométrica del mineral laterítico y sus mezclas con el carbón obedecen a la representación en escala cartesiana–cartesiana.

Por su parte, Torres, (2016) en un trabajo similar, analiza la distribución de tamaño de la molienda del mineral laterítico, carbon bituminoso, por separado y sus mezclas. Sus resultados muestran que la distribución de tamaño del producto molido del mineral laterítico por separado, obedece al modelo de Rosin–Rammmler con un error de estimación del 3,05 %; mientras que, la distribución granulométrica del carbón bituminoso responde al modelo de Gaudin–Schuhmann, con un error de estimación del 0,47 %. Sin embargo, no realiza la caracterización granulométrica de la molienda de sus mezclas.

Conclusiones parciales

- Los modelos de distribución de tamaño de partículas constituyen una herramienta fundamental para la representación granulométrica de los procesos de conminución.
- En la bibliografía consultada no se reporta la identificación de los parámetros en los modelos de representación de la distribución de tamaños, a escala industrial, para la molienda del mineral laterítico.

CAPÍTULO II MATERIALES Y MÉTODOS

Los métodos a seleccionar en cualquier investigación y su posterior ejecución constituyen la herramienta fundamental para asegurar la veracidad de sus resultados de la misma. Por esta razón, en el presente capítulo, se describen los materiales y métodos utilizados en la investigación, se hace referencia a la descripción de la metodología empleada en el cálculo de la carga circulante, la obtención de los parámetros de las funciones de distribución y las técnicas estadísticas empleadas para la evaluación del grado de ajuste de dichas funciones a los datos experimentales.

Los objetivos del presente capítulo son:

- Mostrar la metodología propuesta por Coello, (1993a) para la determinación experimental de las distribuciones granulométricas de los productos de la molienda del mineral laterítico.
- Exponer la metodología propuesta por Coello, (2015) para la estimación de los contenidos balanceados en un esquema en circuito cerrado de molienda, así como, la metodología para la determinación de los parámetros de las funciones de distribución de tamaño de partículas.

2.1 Diseño de la investigación

Como base de partida para el desarrollo del presente trabajo, y con el objetivo de darle solución a la problemática planteada, se tomaron los resultados obtenidos por Coello, (1993a); ver anexos A1.1 al A1.6, en sus experimentos realizados a escala de industrial, en donde se determinaron la influencia de los parámetros de operación; tales como, el flujo de alimentación, el flujo de aire, el ángulo de inclinación de las paletas del separador y la carga de bolas; en la composición granulométrica de los productos de la molienda del mineral laterítico. El procedimiento aplicado para la obtención de los resultados se muestra de forma detallada.

Posteriormente, se hace alusión a las relaciones matemáticas para el cálculo de la carga circulante según el método convencional y el propuesto por Coello (2015). Se describe la metodología empleada para identificación de los parámetros de las

funciones de distribución de tamaño, el cual consiste en realizar una linealización de estas funciones a partir de los datos experimentales.

Una vez obtenidos los resultados de los parámetros de cada una de las funciones, se determinan los valores modelados del pasante acumulado, y a continuación se efectúa un estudio estadístico para la valoración del grado de ajuste con los valores experimentales, con el objetivo de determinar cuál modelo se ajusta de mejor manera a los datos obtenidos por Coello, (1993a).

Las técnicas estadísticas empleadas fueron: el coeficiente de correlación R^2 , el criterio de Cochran y la desviación o error estándar (Mitrofánov, *et al.*, 1982; Spiegel, *et al.*, 2001).

2.2 Diseño experimental empleado en la realización de los ensayos (Coello-Velázquez, 1993a)

Las complejidades de las investigaciones a nivel industrial se relacionan principalmente con la aparición de un grupo importante de factores imposibles de controlar a esa escala, la necesidad de estrechar los intervalos de variación para evitar los errores graves y la selección de un número grande de criterios de optimización (Coello-Velázquez, *et al.*, 2009).

Paralelamente en las investigaciones industriales es casi obligatorio que estas se lleven a cabo en los regímenes tecnológicos corrientes durante un período largo, la necesidad de un esquema que contenga varios puntos de muestreo, y empleo de un aparato voluminoso de datos y criterios estadísticos que permitan validar la reproducibilidad de los ensayos.

Un diagnóstico inicial realizado a la planta mostró la existencia de frecuentes embuches de molino, alta variabilidad de la alimentación, remolienda del mineral, alto contenido en las arenas en el producto molido y altos consumos energéticos.

Para resolver este momento metodológico, se seleccionó el experimento factorial completo, tabla 1 y 2, para evaluar el efecto de las siguientes variables: flujo de alimentación (Q_a , t/h), gasto del flujo de aire (Q_b , m³/h) y ángulo de inclinación de las paletas del separador de aire (α , °) en los niveles de 40 y 45 % de carga de bolas.

Tabla 1 Código de niveles del experimento factorial completo empleado por Coello-Velázquez (1993a)

Nº	Régimen de trabajo		
	Q_a	Q_b	α
1	+	+	+
2	+	-	-
3	-	+	-
4	-	-	+
5	+	+	-
6	+	-	+
7	-	+	+
8	-	-	-

Tabla 2 Valores de las variables de operación en el diseño experimental empleado por Coello-Velázquez, (1993a)

	Nivel básico	Nivel máximo	Nivel mínimo
Q_a , t/h	91	100	82
Q_b , m ³ /h	63 650	68 700	58 600
α , °	4	5	3

2.3 Principales equipos e instrumentos empleados durante los ensayos (Coello-Velázquez, 1993a)

Los ensayos se realizaron en toda la línea tecnológica Nº 2 de la sección de molienda de la empresa Comandante "Ernesto Che Guevara", la cual incluye los siguientes equipos industriales:

- Molino de bolas con una productividad máxima de 120 t/h, cuyas dimensiones DxL son 3200x5700 mm.
- Separador de aire, cuyo consumo de aire varía entre 74 – 135 m³/min. Sus dimensiones son: diámetro máximo 4250 mm, altura 7560 mm y diámetro de trabajo 1600 mm.
- Un ventilador de recirculación con una capacidad de 134 000 m³/h y una presión de trabajo de 2840 kgf/m².

Para el análisis granulométrico se empleó un juego de tamices de la siguiente serie (0,149; 0,074 y 0,044 mm).

2.4 Materiales utilizados y sus características (Coello-Velázquez, 1993a).

El material utilizado durante esta investigación es la laterita del yacimiento de Punta Gorda, este yacimiento es un típico depósito residual de níquel, cobalto y hierro asociado a una corteza de meteorización desarrollada en forma de un potente manto, esencialmente laterítico, sobre un macizo de rocas ultrabásicas serpentinizadas. Se distingue por el fino espesor de la capa de serpentina alterada que se interpone entre la capa limonítica y el lecho de roca (Cooke y Pongratz, 2003).

La laterita se define como "suelo rojo residual" que se desarrolla en regiones húmedas tropicales y subtropicales con buen drenaje. La sílice y el magnesio son lixiviados y contienen concentraciones, particularmente, de hidróxidos de hierro y aluminio.

El mineral laterítico se compone de una mezcla de limonita (de carácter terroso) y de serpentinas parcialmente descompuestas y duras. La limonita aparece como tierra suelta o en terrones de color amarillo; por su parte el material serpentínico presenta toda la gama desde mineral terroso hasta fracciones de rocas duras de diversos tamaños. Este mineral está acompañado de una humedad promedio de 38 %, variando desde un 30 a un 40 %. El peso volumétrico del mineral seco "in situ" es de $1,20 \text{ t/m}^3$ y el del mineral húmedo "in situ" es de $1,78 \text{ t/m}^3$ (Rojas, 1995).

Las características químicas de los horizontes de la corteza de intemperismo del yacimiento Moa muestran un cuadro geoquímico en correspondencia con la génesis de estos depósitos exógenos, evidenciando una tonalidad química vertical muy bien definida (Rojas, 1995). Sobre la base del comportamiento de los parámetros geomorfológicos, geológicos y geoquímicos, dicho yacimiento ha sido dividido en siete dominios geológicos (Vera, 2001).

2.5 Metodología para determinar la carga circulante

Para determinar los valores de la carga circulante por el método convencional se emplea la ecuación (1) y por el método propuesto por Coello (2015), la ecuación (12).

Los parámetros ajustados de la ecuación (12) se obtienen a partir de las ecuaciones (16), (17) y (18), para lo cual, se determina el residuo de la clase i de cada parámetro mediante las ecuaciones (24), (25) y (26).

El multiplicador de Lagrange se obtiene mediante la ecuación (27) y el residuo o error mediante la ecuación (13). Todas las operaciones antes mencionadas se realizan en una hoja de cálculo de Microsoft Excel.

2.6 Metodología para la determinación de los parámetros de las funciones de distribución.

A partir de los valores recalculados de los contenidos de las clases granulométricas de los productos de la molienda, obtenidos mediante la cálculo de la carga circulante, se realiza la identificación de los parámetros de las funciones de distribución para cada uno de estos productos (descarga del molino, producto recirculado y producto final).

Para dicho fin, se emplea una hoja de cálculo de Microsoft Excel diseñado convenientemente.

2.6.1 Función de Gaudin – Schuhmann

La estimación de los parámetros "m" y "k" de la función de Gaudin – Schuhmann se realiza a partir de la representación gráfica de la ecuación (29), figura 5 (ver anexos A2.1 al A2.6).

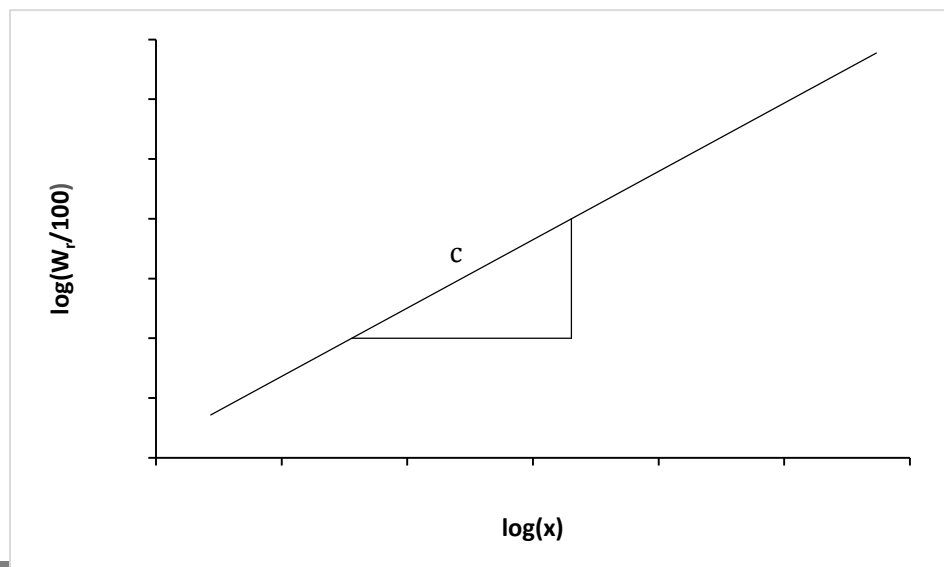


Figura 5 Representación gráfica de la función de Gaudin – Schuhmann.

La línea recta obtenida, en la figura 5, tiene la forma $y = cx + d$, donde c es la pendiente de la recta y d el intercepto. Al comparar la ecuación de la recta con la ecuación (29), se concluye:

$$m = c \text{ (pendiente de la recta)} \quad (33)$$

$$-m \log(k) = d$$

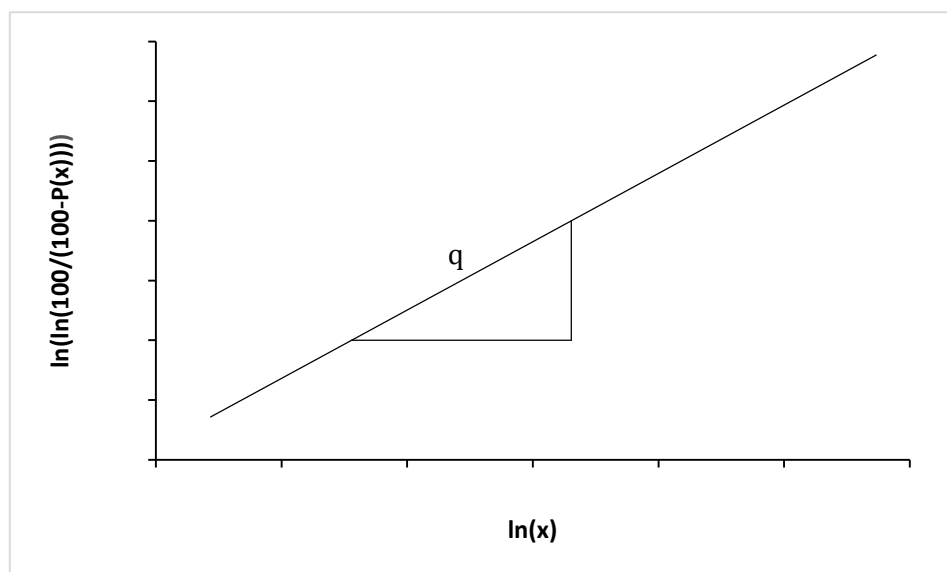
de donde:

$$k = 10^{-\frac{d}{m}} \quad (34)$$

Una vez identificados los parámetros de dicha función, se determina el pasante acumulativo mediante la ecuación (28).

2.6.2 Función de Rosin - Rammler

Similar al caso anterior, la estimación de los parámetros "n" y "a" de la función de Rosin–Rammler se realiza a partir de la representación gráfica de la ecuación (31), figura 6 (ver anexos A2.7 al A2.12).

**Figura 6** Representación gráfica de la función de Rosin – Rammler

La línea recta obtenida, en la figura 6, tiene la forma $y = qx + r$, donde q es la pendiente de la recta y r el intercepto. Al comparar la ecuación de la recta con la ecuación (31), se concluye:

$$n = q \text{ (pendiente de la recta)} \quad (35)$$

$$-n \ln(a) = r$$

de donde:

$$a = e^{-\frac{r}{n}} \quad (36)$$

Una vez identificados los parámetros de dicha función, se determina el pasante acumulativo mediante la ecuación (30).

2.6.3 Función Swebrec

La estimación de los parámetros " $x_{\max}$ " y " x_{50} " de la función Swebrec se realiza a partir de la representación gráfica, en escala cartesiana–cartesiana, del porcentaje del pasante acumulado experimental en función del tamaño de partícula, figura 7.

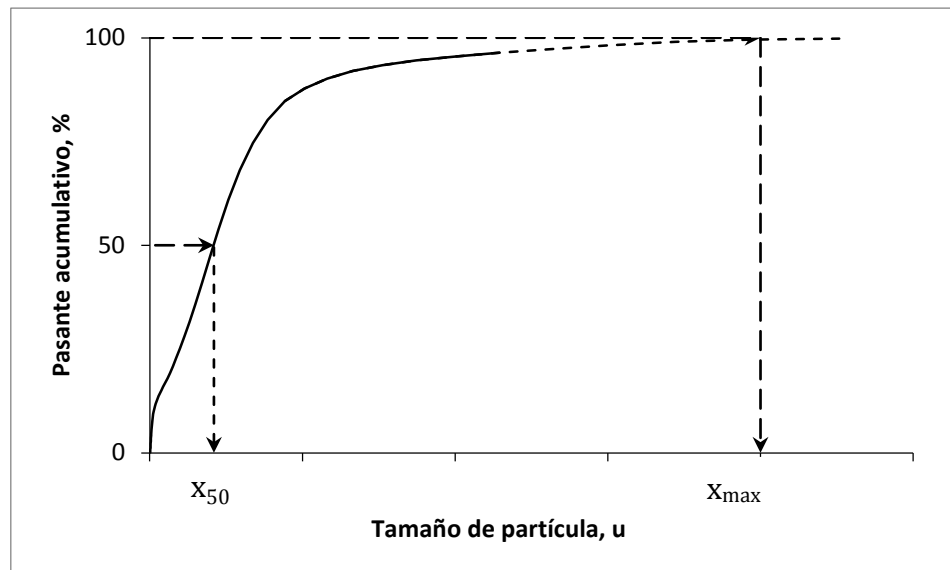


Figura 7 Modelo del gráfico empleado para estimar los valores de $x_{\max}$ y x_{50}

Por otra parte, para la estimación del parámetro " b ", en primer lugar, se determina " b_i " mediante:

$$b_i = \ln \left[\frac{\frac{100 - P(x_i)}{P(x_i)}}{\frac{\ln \left(\frac{x_{\max}}{x_i} \right)}{\ln \left(\frac{x_{\max}}{x_{50}} \right)}} \right] \quad (37)$$

Por tanto:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n} \quad (38)$$

Una vez identificados los parámetros de dicha función, se determina el pasante acumulativo mediante la ecuación (32).

El análisis de la dependencia de los parámetros de las modelos de distribución en función de las variables de operación se realiza empleando el software Statgraphics CENTURION XV.II, el cual brinda las siguientes opciones:

ANOVA Multifactorial: Este procedimiento está diseñado para construir un modelo estadístico que describe el impacto de dos o más factores categóricos X_j en una variable dependiente Y . Se corren pruebas para determinar si hay diferencias significativas entre las medias de Y a diferentes niveles de los factores y para determinar si hay interacciones entre los factores. Además, los datos pueden ser mostrados gráficamente en varias formas, incluyendo un gráfico múltiple de dispersión, un gráfico de medias y un gráfico de interacción. Este procedimiento está diseñado para experimentos relativamente simples, como experimentos factoriales con efectos fijados.

Regresión Múltiple: Este procedimiento está diseñado para construir un modelo estadístico que describe el impacto de dos o más factores cuantitativos X en una variable dependiente Y . El procedimiento incluye una opción para ejecutar una regresión por pasos, en la cual un subgrupo de X variables es seleccionado. El modelo ajustado se puede usar para hacer predicciones, incluyendo límites de confianza y/o límites de predicción. Los residuales también pueden ser graficados y las observaciones influyentes identificadas.

2.7 Técnicas estadísticas para la validación de los modelos

En innumerables ocasiones, no sólo el investigador, sino el profesional de la rama metalúrgica, tiene ante sí la tarea de decidir si existe diferencia significativa o no en los resultados de dos o más series de datos analizados, para resolver este problema se realiza un tratamiento estadístico de los mismos.

Dentro de las magnitudes estadísticas utilizadas en la presente investigación se encuentran: el coeficiente de correlación R^2 , criterio de Cochran y la desviación media o error estándar.

2.7.1 Coeficiente de correlación R^2

El coeficiente de correlación R^2 (coeficiente de Pearson) es una medida de la relación lineal entre dos variables aleatorias cuantitativas. A diferencia de la covarianza, el coeficiente de correlación R^2 es independiente de la escala de medida de las variables. Este coeficiente puede determinarse mediante:

$$R^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (P_{i,\text{mod}} - \overline{P_{\text{mod}}})(P_{i,\text{exp}} - \overline{P_{\text{exp}}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (P_{i,\text{mod}} - \overline{P_{\text{mod}}})^2 \sum_{i=1}^n (P_{i,\text{exp}} - \overline{P_{\text{exp}}})^2}} \right)^2 \quad (39)$$

2.7.2 Criterio de Cochran

El criterio de Cochran, ecuación (40), se emplea cuando se quiere comparar tres o más series de datos de igual tamaño, cuyas medias no se diferencian sustancialmente, es decir, se utiliza para análisis de la homogeneidad (heterogeneidad) de las varianzas (S^2).

$$C = \frac{S_{i, \max}^2}{\sum_{i=1}^n S_i^2} \quad (40)$$

donde

$$S_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (P_{i,\text{exp}} - P_{i,\text{mod}})^2}{n - 1} \quad (41)$$

Si la relación (40) resulta mayor que su valor crítico, vease más adelante, la diferencia de la varianza máxima, con respecto a las otras, resulta importante, es decir, la serie experimental cuya varianza es máxima, es menos exacta que las demás. De lo contrario, no existen suficientes argumentos para tal afirmación (Mitrofánov, et al., 1982; Spiegel, et al., 2001).

El valor crítico del criterio de Cochran se obtiene considerando:

- Nivel de confianza: 95 %
- Grados de libertad, ($f_1 = n - 1$ y $f_2 = N$): 2 y 8 respectivamente.

2.7.3 Desviación o error estándar

La desviación estándar, al igual que la varianza, expresa el grado de error de reproducibilidad de cualquier medición, en términos absolutos, o sea, caracteriza la homogeneidad (heterogeneidad) de cualquier conjunto de valores, y se determina mediante:

$$\sigma_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (P_{i,\text{exp}} - P_{i,\text{mod}})^2}{n - 1}} \quad (42)$$

Conclusiones parciales

- Los ensayos experimentales, para la obtención de la composición granulométrica de los productos de la molienda del mineral laterítico, realizados por Coello (1993a) constituyó la base de partida de la investigación.
- El diseño de la investigación, garantiza adecuadamente el tratamiento del problema planteado, se determinan los valores del pasante acumulativo mediante las funciones de distribución, a partir de la identificación de sus parámetros, con su correspondiente análisis estadístico.

CAPÍTULO III RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el presente capítulo se tiene como objetivo realizar un análisis de los resultados obtenidos del cálculo de la carga circulante (mediante los dos métodos), los valores de los contenidos de las clases granulométricas recalculados y los valores de estos modelados mediante las funciones de distribución de tamaños. A su vez, se realiza el análisis de la influencia de los parámetros de las funciones de distribución en función de las variables de operación, y el tratamiento estadístico que ratifica la veracidad (reproducibilidad) de los modelos propuestos.

3.1 Resultados del cálculo de la carga circulante

En la tabla 3 se muestran los valores de la carga circulante (C) obtenidos mediante el método convencional (ecuación 1), para cargas de bolas de 40 y 45 %. Según los resultados de la tabla, para el 40 % de carga de bolas, existen valores de la carga circulante que poseen signo negativo.

Estos valores, pierden todo sentido físico y básicamente aparecen por fluctuaciones aleatorias de las propiedades físicas y físico-mecánicas del material en la alimentación fresca o por errores, casi siempre graves, en las operaciones de muestreo y las determinaciones analíticas que provocan desviaciones en el balance de las clases de tamaño (Coello-Velázquez, 2015).

El desbalance de la distribución de las clases de tamaño de manera natural se reflejará en los valores ponderados de la carga circulante (Coello-Velázquez, 2015); en este caso particular se debe a la distribución del contenido de las clases granulométricas en los productos de descarga del molino (f'), la recirculación (c) y el producto final (p). En este sentido, se registra un incremento de la clase +0,149 mm y una disminución de la clase -0,044 mm en el producto final con respecto a la descarga del molino, condición que hace negativo el término de la derecha de la ecuación (1).

Por otra parte, para el 45 % de carga de bolas, no se registran valores negativos de la carga circulante. Esto se debe a que los valores del contenido de las clases del producto final son similares a los requisitos establecidos por la tecnología

(contenidos de las clases $-0,044$ mm, $-0,074$ mm y $+0,149$ mm están en el 75 %, 80 – 85 % y 3 – 4 % respectivamente) para la mayoría de los regímenes evaluados; para niveles de la carga de bolas del 40 %, el contenido de la clase $+0,149$ mm resulta excesivamente alto (Coello-Velázquez, 1993a; Coello-Velázquez, et al., 2009). Todo indica que los regímenes tecnológicos que operan con una carga de bolas 45% son más productivos.

Tabla 3 Valores de la carga circulante obtenidos mediante el método convencional (ecuación 1).

Nº	Tamaño de partícula, mm	Carga de bolas: 40 %				Carga de bolas: 45 %			
		Contenidos de la clase, %			Carga Circul.	Contenidos de la clase, %			Carga Circul.
		f'	c	p		f'	c	p	
1	0,149	82,25	47,27	92,21	0,28	87,56	54,66	95,66	0,25
	0,074	72,10	34,78	79,63	0,20	79,22	39,70	85,08	0,15
	0,044	59,20	31,52	72,04	0,46	64,13	39,20	75,74	0,47
2	0,149	72,77	43,75	93,39	0,71	67,67	64,00	97,09	8,01
	0,074	68,99	43,17	77,65	0,34	50,41	44,66	86,92	6,35
	0,044	57,67	37,16	67,32	0,47	44,91	39,03	79,98	5,96
3	0,149	75,62	47,87	88,40	0,46	81,03	62,71	97,67	0,91
	0,074	63,84	45,43	82,87	1,03	61,31	48,54	88,16	2,10
	0,044	57,95	41,23	77,89	1,19	50,20	42,06	80,34	3,70
4	0,149	86,30	54,12	84,86	-0,04	85,28	48,91	94,06	0,24
	0,074	58,10	39,57	64,71	0,36	69,21	38,41	87,30	0,59
	0,044	43,80	34,81	41,57	-0,25	60,56	37,93	73,56	0,57
5	0,149	73,85	55,44	90,88	0,92	85,34	65,60	97,41	0,61
	0,074	73,77	45,68	83,68	0,35	76,89	46,12	87,18	0,33
	0,044	76,13	40,92	78,28	0,06	53,49	38,73	78,77	1,71
6	0,149	85,21	54,63	92,45	0,24	70,63	61,04	95,92	2,64
	0,074	69,97	42,29	84,21	0,51	52,58	46,46	84,20	5,16
	0,044	57,57	34,81	78,26	0,91	46,51	40,14	71,33	3,90
7	0,149	69,21	54,78	95,04	1,79	81,93	51,51	96,29	0,47
	0,074	59,17	46,17	83,91	1,90	66,17	43,86	86,90	0,93
	0,044	53,72	42,20	79,76	2,26	59,77	33,46	74,84	0,57
8	0,149	64,40	54,92	89,21	2,62	79,46	60,08	97,04	0,91
	0,074	53,30	45,33	71,75	2,31	61,37	22,37	85,10	0,61
	0,044	47,69	33,04	64,12	1,12	53,13	17,18	78,77	0,71

En la tabla 4 se muestran los valores de la carga circulante determinados por las ecuaciones (1) y (12) para niveles de carga de bolas del 40 y 45 %. En esta dirección, existen desviaciones importantes entre los de valores C y $\dot{C}$, para todos los regímenes tecnológicos.

Tabla 4 Valores de la carga circulante obtenidos mediante el método convencional y el procedimiento desarrollado por Coello-Velázquez (2015).

Nº	Carga de bolas: 40 %			Carga de bolas: 45 %		
	Carga circulante		Desviación absoluta, u	Carga circulante		Desviación absoluta, u
	C^*, u	$\dot{C}, u$		C^*, u	$\dot{C}, u$	
1	0,20	0,29	0,09	0,15	0,24	0,09
2	0,34	0,53	0,19	6,35	6,46	0,11
3	1,03	0,75	0,29	2,10	1,58	0,52
4	0,36	0,04	0,32	0,59	0,42	0,17
5	0,35	0,28	0,07	0,33	0,60	0,26
6	0,51	0,49	0,02	5,16	3,49	1,67
7	1,90	1,95	0,05	0,93	0,61	0,32
8	2,31	1,69	0,62	0,61	0,69	0,08

* Carga circulante por la clase de cálculo $-0,074$ mm.

Los contenidos de las clases de tamaño de los productos de la molienda (parámetros de ambas ecuaciones), son variables aleatorias supeditadas no solo a los cambios de valor (magnitud) en cada medición, debido a que están sujetas a la fuerte influencia de errores casuales, sistemáticos e incluso graves, cometidos durante la realización del experimento; todas estas fluctuaciones se muestran en los valores de C , mientras que en los valores de $\dot{C}$, por concepto, se minimiza el efecto de estas fluctuaciones e incongruencias en los valores del contenido de los diferentes productos (Coello-Velázquez, 2015).

En el caso de la carga circulante, calculada por la fórmula 12 ($\dot{C}$), quedó demostrado por Coello-Velázquez (2015), que sus valores hacen mínimo la suma cuadrática de los residuos, y por ende, resultan más cercanos a los valores reales de esta variable aleatoria; dicho en otras palabras, los valores resultantes de "mejor ajuste" de la carga circulante.

En la tabla 5 aparecen los valores recalculados de los contenidos de las clases granulométricas de los productos del esquema de la figura 2, para el 40 y 45 % de carga de bolas. Estos valores coinciden con el "mejor ajuste" de la carga circulante. El cálculo del residuo (ϵ_r) con estos "nuevos contenidos" por la ecuación (13) confirma la minimización de los residuos en el cálculo de la carga circulante por la ecuación (12).

Tabla 5 Valores de los contenidos de las clases granulométricas recalculados.

Nº	Tamaño de partícula, μm	Carga de bolas: 40 %				Carga de bolas: 45 %			
		Contenidos de la clase recalculados, %			Residuo, ϵ_r	Contenidos de la clase recalculados, %			Residuo, ϵ_r
		f'_r	c_r	p_r		f'_r	c_r	p_r	
1	0,149	82,14	47,29	92,29	0	87,64	54,64	95,60	0
	0,074	70,53	35,13	80,84	0	77,47	40,04	86,49	0
	0,044	61,44	31,01	70,30	0	66,80	38,68	73,59	0
2	0,149	75,00	42,98	91,93	0	68,10	63,62	97,03	0
	0,074	66,88	43,90	79,03	0	50,36	44,70	86,93	0
	0,044	57,17	37,33	67,65	0	44,69	39,22	80,01	0
3	0,149	72,60	49,16	90,13	0	77,90	64,62	98,88	0
	0,074	65,83	44,57	81,73	0	63,00	47,50	87,50	0
	0,044	60,77	40,02	76,28	0	54,59	39,37	78,64	0
4	0,149	84,96	54,17	86,15	0	82,38	49,76	96,10	0
	0,074	61,04	39,46	61,87	0	71,49	37,73	85,69	0
	0,044	42,51	34,86	42,81	0	62,11	37,47	72,47	0
5	0,149	79,42	54,21	86,53	0	85,46	65,56	97,34	0
	0,074	74,71	45,47	82,95	0	73,59	47,35	89,25	0
	0,044	72,47	41,72	81,14	0	60,22	36,21	74,55	0
6	0,149	81,88	55,72	94,69	0	69,52	61,90	96,17	0
	0,074	70,27	42,19	84,01	0	53,95	45,39	83,89	0
	0,044	61,68	33,45	75,50	0	46,85	39,87	71,25	0
7	0,149	68,71	55,11	95,21	0	80,20	52,17	97,36	0
	0,074	59,04	46,26	83,95	0	69,03	42,77	85,12	0
	0,044	54,50	41,68	79,50	0	59,34	33,62	75,10	0
8	0,149	66,52	53,59	88,42	0	81,13	59,39	96,05	0
	0,074	54,50	44,57	71,30	0	60,19	22,85	85,80	0
	0,044	45,66	34,31	64,87	0	53,51	17,02	78,54	0

3.2 Resultados de la estimación y análisis de los parámetros de las funciones de distribución

En la tabla 6 se muestran los valores de los parámetros de las funciones de distribución de tamaño estimados para la descarga del molino (carga de bolas: 40 %). En ella se observa la amplia variabilidad de los valores numéricos de estos parámetros, independientemente del modelo tratado, en dependencia de los regímenes de trabajo.

Tabla 6 Valores estimados de los parámetros de las funciones de distribución para la descarga del molino (carga de bolas: 40 %)

Nº	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec		
	k	m	a	n	$x_{\max}$	x_{50}	b
1	0,3360	0,2369	0,0487	0,4857	0,4253	0,0223	1,6402
2	0,5243	0,2193	0,0631	0,3987	0,8058	0,0253	1,6947
3	1,3338	0,5623	0,0393	0,2363	2,5101	0,0145	1,7155
4	0,1926	0,5623	0,0789	1,0080	0,2288	0,0543	1,8315
5	3,2107	0,0758	0,0102	0,1687	5,4941	0,0009	1,5779
6	0,3495	0,2315	0,0485	0,4740	0,4452	0,0217	1,6437
7	1,0879	0,1914	0,0969	0,3221	2,2069	0,0315	1,8559
8	0,5530	0,3071	0,1230	0,4787	1,0556	0,0568	1,8979

La influencia de las variables: flujo de alimentación (Q_a), flujo de aire (Q_b) y ángulo de inclinación de las paletas del separador de aire (α) (variables independientes) en el comportamiento de los parámetros de los modelos de distribución (variables dependientes), se realiza mediante el análisis de varianza y de regresión múltiple.

Los resultados de los análisis de varianza se muestran en la tabla 7, el cual, descompone la variabilidad de cada uno de los parámetros de los modelos de distribución en las contribuciones debidas a los tres factores o variables independientes. Los valores-P comprueban la importancia estadística de cada uno de los factores.

Como se observa, los valores-P de los tres factores independientes son mayores a 0,05, por lo que dichos factores no tienen efecto estadísticamente significativo, en los

parámetros de los modelos de Gaudin–Schuhmann y Rosin–Rammler, con un nivel de confianza del 95 %.

Tabla 7 Análisis de varianza de los parámetros de los modelos de distribución de tamaño para la descarga del molino (carga de bolas: 40 %).

Modelo de distribución	Efectos principales	Suma de cuadrados	Razón F	Valor-P
Gaudin – Schuhmann	k	Q_a	0,19631	0,29
		Q_b	2,36423	3,51
		α	1,67061	2,48
		Residuo	2,69600	
	m	Q_a	0,09236	3,24
		Q_b	0,00805	0,28
		α	0,00041	0,01
		Residuo	0,11404	
Rosin – Rammler	a	Q_a	0,00351	4,22
		Q_b	0,00175	2,11
		α	0,00017	0,21
		Residuo	0,00333	
	n	Q_a	0,03354	1,01
		Q_b	0,16434	4,94
		α	0,12686	3,82
		Residuo	0,13299	
Función Swebrec	x_{ma} x	Q_a	0,17082	0,08
		Q_b	8,20328	4,05
		α	5,37822	2,65
		Residuo	8,11183	
	x_{50}	Q_a	0,00094	8,10
		Q_b	0,00099	8,48
		α	0,00013	1,12
		Residuo	0,00047	
	b	Q_a	0,06925	19,01
		Q_b	0,00968	2,66
		α	0,00091	0,25
		Residuo	0,01457	

Se obtiene un comportamiento similar al analizar la variabilidad del parámetro x_{max} de la función Swebrec. Sin embargo, los valores–P de los factores Q_a y Q_b (para x_{50}) y Q_a (para b) son inferiores a 0,05, por lo que estos factores tienen efecto estadísticamente significativo con un nivel de confianza del 95 %.

En la tabla A3.1 se presentan los coeficientes de regresión múltiple para cada uno de los parámetros de los modelos de distribución.

Los resultados del análisis de varianza del modelo de regresión múltiple se muestran en la tabla 8. Puesto a que los valores-P son superiores a 0,05, no existe una relación estadísticamente significativa entre las variables independientes (Q_a , Q_b y α) con los parámetros de las funciones de Gaudin-Schuhmann y Rosin-Rammler, y el parámetro $x_{\max}$ de la función Swebrec, con un nivel de confianza del 95 %. Sin embargo, dado a que los valores-P, para x_{50} y b , son inferiores a 0,05 estos presentan una relación estadísticamente significativa con las variables independientes.

Tabla 8 Análisis de varianza de los modelos de regresión múltiple para la descarga del molino (carga de bolas: 40 %).

Estadístico	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec		
	k	m	a	n	$x_{\max}$	x_{50}	b
Suma de cuadrados	4,23	0,10	0,005	0,32	13,75	0,002	0,07
Cuadrado medio	1,41	0,03	0,003	0,11	4,58	0,001	0,07
Razón F	2,09	1,18	2,18	3,26	2,26	8,80	16,51
Valor-P	0,24	0,42	0,23	0,14	0,22	0,03	0,006
R^2 (R^2_{ajustado})	61,08 (31,89)	42,96 (7,12)	62,06 (33,60)	70,94 (49,15)	62,90 (35,07)	76,41 (66,98)	73,35 (68,91)
Error estándar	0,82	0,17	0,03	0,18	1,42	0,01	0,06
Erro absoluto	0,49	0,10	0,02	0,10	0,86	0,007	0,04
EDW* (valor-P)	0,83 (0,13)	1,16 (0,28)	1,31 (0,30)	1,26 (0,33)	0,83 (0,13)	1,66 (0,43)	2,19 (0,56)

*Estadístico Durbin-Watson

Los modelos de regresión se presentan en las ecuaciones (43) y (44):

$$x_{50} = 0,0284 - 0,0108 \cdot Q_a - 0,0111 \cdot Q_b \quad (43)$$

$$b = 1,7321 - 0,0930 \cdot Q_a \quad (44)$$

El estadístico R^2 indica que el modelo así ajustado explica el 76,41 % de la variabilidad de " x_{50} " y el 73,35 % de " b ". El estadístico R^2 ajustado, que es el estadístico más apropiado para comparar modelos con diferentes números de variables independientes es 66,98 % y 68,91 %. Además, los modelos propuestos presentan errores absolutos del 0,007 y 0,04 respectivamente.

Los estadísticos de Durbin-Watson (EDW) examinan los residuos para determinar si hay alguna correlación significativa basada en el orden en el que se presentan en el archivo de datos. Puesto que el valor-P es mayor que 0,05, no hay indicación de una autocorrelación serial en los residuos con un nivel de confianza del 95 %.

Las figuras 8 y 9 muestran la relación entre los valores de los parámetros " x_{50} " y " b " de la función Swebrec y los valores determinados a partir del modelos de regresión (ecuación 43 y 44), en ellas se demuestra una estrecha relación entre los valores observados y los valores modelados.

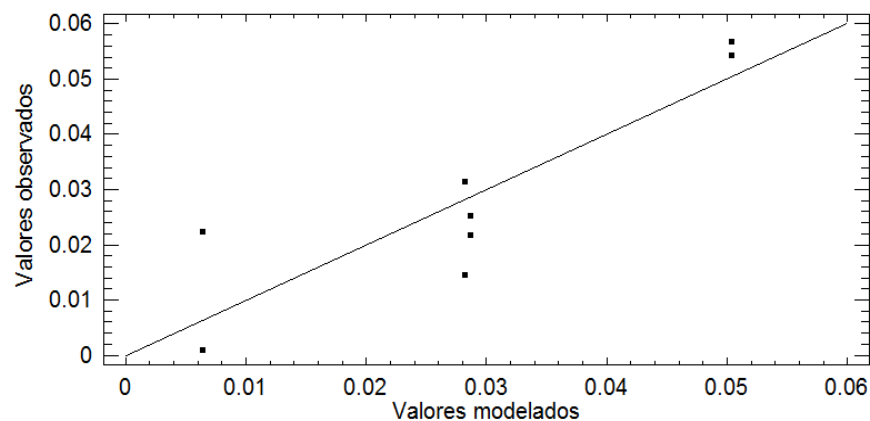


Figura 8 Correlación entre los valores de " x_{50} " observados y los valores obtenidos por el modelo 43.

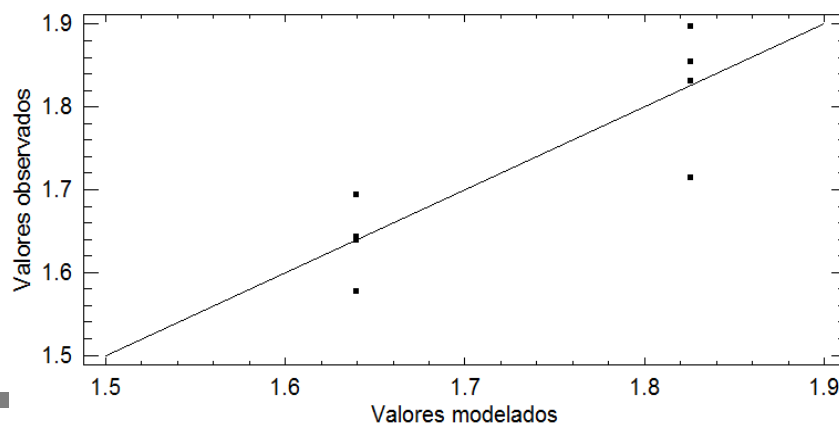


Figura 9 Correlación entre los valores de "b" observados y los valores obtenidos por el modelo 44.

En la tabla 9 se muestran los valores de los parámetros de las funciones de distribución de tamaño estimados para el producto recirculado con una carga de bolas del 40 %. Al igual que en el caso anterior, se observa una amplia variabilidad de los valores numéricos de estos parámetros, independientemente del modelo tratado.

Tabla 9 Valores estimados de los parámetros de las funciones de distribución para el producto recirculado (carga de bolas: 40 %)

Nº	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec		
	k	m	a	n	$x_{\max}$	x_{50}	b
1	1,3204	0,3504	0,4184	0,4534	0,4866	0,1669	1,0491
2	298,1061	0,1073	6,9593	0,1402	1,5151	0,2983	0,6190
3	10,1249	0,1670	0,8043	0,2277	0,7643	0,1550	0,8821
4	0,8334	0,3665	0,2590	0,4990	0,3959	0,1275	1,0554
5	2,5993	0,2167	0,3469	0,3060	0,5352	0,1132	0,7737
6	0,5998	0,4171	0,2136	0,5682	0,3619	0,1192	0,9935
7	2,0181	0,2302	0,3010	0,3267	0,5041	0,1074	0,7650
8	0,7983	0,3597	0,2444	0,4871	0,4149	0,1231	0,8405

Las variabilidades de cada uno de los parámetros de los modelos de distribución, debidas a los tres factores independientes, se muestran en la tabla 10. Como se observa, los valores-P de los tres factores independientes son mayores a 0,05, por lo que dichos factores no tienen efecto estadísticamente significativo, en los parámetros de los modelos de Gaudin–Schuhmann, Rosin–Rammler y función Swebrec, con un nivel de confianza del 95 %.

En la tabla A3.2 se presentan los coeficientes de regresión múltiple para cada uno de los parámetros de los modelos de distribución. Los resultados del análisis de varianza del modelo de regresión múltiple se muestran en la tabla 11. Debido a que los valores-P, de los modelos de regresión múltiple, son superiores a 0,05, no existe una relación estadísticamente significativa entre las variables o factores

independientes (Q_a , Q_b y α) y los parámetros de las funciones de Gaudin–Schuhmann, Rosin–Rammler y la función Swebrec, con un nivel de confianza del 95 %.

A demás, el estadístico R^2 indica que los modelos de regresión describen o explican en menos del 50 % la variabilidad de cada parámetro de distribución con respecto a las variables independientes.

Tabla 10 Análisis de varianza de los parámetros de los modelos de distribución de tamaño para el producto recirculado (carga de bolas: 40 %).

Modelo de distribución	Efectos principales	Suma de cuadrados	Razón F	Valor-P	
Gaudin – Schuhmann	k	Q _a	10429,4	0,94	0,3862
		Q _b	10101,5	0,91	0,3930
		α	11770,1	1,07	0,3602
		Residuo	44169,4		
	m	Q _a	0,00012	0,01	0,9489
		Q _b	0,01024	0,95	0,3855
		α	0,03296	3,05	0,1558
		Residuo	0,04325		
Rosin – Rammler	a	Q _a	5,00782	0,89	0,3999
		Q _b	4,21327	0,75	0,4366
		α	6,41339	1,13	0,3468
		Residuo	22,6098		
	n	Q _a	0,00066	0,03	0,8626
		Q _b	0,01811	0,93	0,3888
		α	0,05587	3,03	0,1566
		Residuo	0,07767		
Función Swebrec	X _{ma} x	Q _a	0,08396	0,52	0,5093
		Q _b	0,01976	0,12	0,7433
		α	0,27417	1,71	0,2611
		Residuo	0,64141		
	X ₅₀	Q _a	0,00425	0,95	0,3839
		Q _b	0,00197	0,44	0,5426
		α	0,00355	0,80	0,4227
		Residuo	0,01785		
	b	Q _a	0,00144	0,06	0,8165
		Q _b	0,00018	0,01	0,9337
		α	0,06988	2,96	0,1605
		Residuo	0,09445		

El estadístico de Durbin-Watson (EDW), tabla 11, para cada uno de los parámetros de distribución, examina los residuos para determinar si hay alguna correlación significativa basada en el orden en el que se presentan en el archivo de datos. Puesto que el valor-P es superior a 0,05, no hay indicación de una autocorrelación serial en los residuos con un nivel de confianza del 95 %.

Tabla 11 Análisis de varianza de los modelos de regresión múltiple para el producto recirculado (carga de bolas: 40 %).

Estadístico	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec		
	k	m	a	n	$x_{\max}$	x_{50}	b
Suma de cuadrados	32301,0	0,04	15,63	0,08	0,38	0,01	0,07
Cuadrado medio	10767,0	0,01	5,21	0,03	0,13	0,003	0,02
Razón F	0,98	1,34	0,92	1,33	0,79	0,73	1,01
Valor-P	0,49	0,38	0,51	0,38	0,56	0,59	0,48
R^2	42,24	50,04	40,88	49,99	37,07	35,40	43,09
(R^2_{ajustado})	(0,0)	(12,58)	(0,0)	(12,49)	(0,0)	(0,0)	(0,45)
Error estándar	105,08	0,10	2,38	0,14	0,40	0,07	0,15
Erro absoluto	56,27	0,06	1,29	0,08	0,22	0,04	0,09
EDW*	2,09	2,39	1,98	2,25	1,80	1,17	2,68
(valor-P)	(0,74)	(0,85)	(0,69)	(0,80)	(0,61)	(0,28)	(0,93)

*Estadístico Durbin-Watson

La tabla 12 muestra los valores de los parámetros de las funciones de distribución de tamaño estimados para el producto final con una carga de bolas del 40 %.

Tabla 12 Valores estimados de los parámetros de las funciones de distribución para el producto final (carga de bolas: 40 %)

Nº	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec		
	k	m	a	n	$x_{\max}$	x_{50}	b
1	0,2077	0,2212	0,0323	0,6133	0,2249	0,0138	1,4906
2	0,2030	0,2494	0,0369	0,6584	0,2206	0,0177	1,5137
3	0,3197	0,1369	0,0181	0,3930	0,3583	0,0044	1,4728
4	0,1871	0,5677	0,0770	1,0352	0,2191	0,0535	1,8292
5	2,3256	0,0532	0,0016	0,1524	3,1420	0,00004	1,4619
6	0,1970	0,1848	0,0259	0,6069	0,2078	0,0086	1,4385
7	0,2158	0,1497	0,0207	0,5446	0,2256	0,0049	1,4265

8	0,2506	0,2569	0,0444	0,6034	0,2834	0,0221	1,6136
---	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Los resultados del análisis de la influencia de las variables independientes (análisis de varianza) se muestran en la tabla 13. Los valores-P comprueban la importancia estadística de cada uno de los factores. Como se observa, los valores-P de los tres factores independientes son mayores a 0,05, por lo que dichos factores no tienen efecto estadísticamente significativo, en los parámetros de los modelos de Gaudin–Schuhmann, Rosin–Rammler y función Swebrec, con un nivel de confianza del 95 %.

Tabla 13 Análisis de varianza de los parámetros de los modelos de distribución de tamaño para el producto final (carga de bolas: 40 %).

Modelo de distribución	Efectos principales	Suma de cuadrados	Razón F	Valor-P
Gaudin – Schuhmann	k	Q_a	0,48025	0,91
		Q_b	0,62223	1,18
		α	0,65626	1,24
		Residuo	2,11183	
	m	Q_a	0,02026	1,36
		Q_b	0,06087	4,08
		α	0,02279	1,53
		Residuo	0,05967	
Rosin – Rammler	a	Q_a	0,00050	1,92
		Q_b	0,00155	5,92
		α	0,00038	1,43
		Residuo	0,00105	
	n	Q_a	0,03716	1,58
		Q_b	0,18018	7,66
		α	0,12321	5,24
		Residuo	0,09412	
Función Swebrec	x_{ma} x	Q_a	0,91727	0,90
		Q_b	1,13997	1,12
		α	1,22219	1,20
		Residuo	4,06388	
	x_{50}	Q_a	0,00025	1,22
		Q_b	0,00078	3,77
		α	0,00017	0,81
		Residuo	0,00082	
	b	Q_a	0,02391	1,53
		Q_b	0,03688	2,36

α	0,00188	0,12	0,7461
Residuo	0,06263		

En la tabla A3.3 se presentan los coeficientes de regresión múltiple para cada uno de los parámetros de los modelos de distribución; y los resultados del análisis de varianza del modelo de regresión múltiple se muestran en la tabla 14. Puesto a que los valores-P son superiores a 0,05, no existe una relación estadísticamente significativa entre las variables independientes (Q_a , Q_b y α) con los parámetros de las funciones de Gaudin-Schuhmann, Rosin-Rammler y la función Swebrec, con un nivel de confianza del 95 %.

Tabla 14 Análisis de varianza de los modelos de regresión múltiple para el producto final (carga de bolas: 40 %).

Estadístico	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec		
	k	m	a	n	x_{max}	x_{50}	b
Suma de cuadrados	1,76	0,10	0,002	0,34	3,26	0,001	0,06
Cuadrado medio	0,58	0,03	0,001	0,11	1,09	0,0004	0,02
Razón F	1,11	2,32	3,09	4,82	1,08	1,93	1,33
Valor-P	0,44	0,22	0,15	0,08	0,45	0,27	0,38
R^2	45,44	63,53	69,86	78,34	44,66	59,18	50,02
($R^2_{ajustado}$)	(4,52)	(36,17)	(47,26)	(62,10)	(3,15)	(28,56)	(12,54)
Error estándar	0,73	0,12	0,02	0,15	1,01	0,01	0,13
Erro absoluto	0,39	0,07	0,01	0,09	0,54	0,01	0,07
EDW*	1,07	1,15	1,14	0,82	1,09	1,38	1,51
(valor-P)	(0,24)	(0,27)	(0,27)	(0,13)	(0,24)	(0,39)	(0,46)

*Estadístico Durbin-Watson

Además, el estadístico de Durbin-Watson (EDW), de cada uno de los parámetros de distribución, examina los residuos para determinar si hay alguna correlación significativa basada en el orden en el que se presentan en el archivo de datos. Debido a que el valor-P es superior a 0,05, no hay indicación de una autocorrelación serial en los residuos con un nivel de confianza del 95 %.

En la tabla 15 se muestran los valores de los parámetros de las funciones de distribución de tamaño estimados para la descarga del molino con una carga de bolas del 45 %. Se observa una amplia variabilidad de los valores numéricos de estos parámetros independientemente del modelo y régimen de trabajo tratado.

La influencia de las variables independientes (Q_a , Q_b y α) en el comportamiento de los parámetros de los modelos de distribución, se realiza mediante el análisis de varianza.

Tabla 15 Valores estimados de los parámetros de las funciones de distribución para la descarga del molino (carga de bolas: 45 %)

Nº	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec		
	k	m	a	n	$x_{\max}$	x_{50}	b
1	0,2606	0,2200	0,0357	0,5222	0,3001	0,0157	1,5475
2	0,4686	0,3502	0,1238	0,5478	0,8115	0,0628	1,2325
3	0,3531	0,2300	0,0707	0,5351	0,4806	0,0357	1,7987
4	0,3375	0,2300	0,0465	0,4762	0,4263	0,0208	1,6284
5	0,2467	0,2828	0,0487	0,6007	0,2924	0,0254	1,5973
6	0,4657	0,3257	0,1109	0,5226	0,7841	0,0548	1,5540
7	0,3570	0,2450	0,0542	0,4804	0,4702	0,0250	1,6630
8	0,2862	0,3460	0,0723	0,6497	0,2207	0,0329	0,8378

Los resultados de dicho análisis se muestran en la tabla 16. Como se observa, a diferencia de los resultados obtenidos (para este tipo de producto) con una carga de bolas del 40 %, los valores-P de los tres factores independientes son mayores a 0,05, por lo que estos factores no tienen efecto estadísticamente significativo, en los parámetros de los modelos de Gaudin–Schuhmann, Rosin–Rammler y función Swebrec, con un nivel de confianza del 95 %. En la tabla A3.4 se presentan los coeficientes de regresión múltiple para cada uno de los parámetros de los modelos de distribución.

Los resultados del análisis de varianza del modelo de regresión múltiple se muestran en la tabla 17. Debido a que, en este caso, los valores-P de los modelos de regresión son mayores a 0,05, no existe una relación estadísticamente significativa entre las variables independientes (Q_a , Q_b y α) con los parámetros de las funciones

de Gaudin–Schuhmann, Rosin–Rammler y la función Swebrec, con un nivel de confianza del 95 %. Es decir, que los modelos de regresión no explican la variabilidad (valores del estadístico R^2 y R^2 ajustado son menores del 75 %) de los parámetros de distribución con respecto a los factores independientes.

Por otra parte, el estadístico de Durbin-Watson (EDW), de cada uno de los parámetros de distribución, examina los residuos para determinar si hay alguna correlación significativa basada en el orden en el que se presentan en el archivo de datos. Debido a que el valor-P es mayor a 0,05, no hay indicación de una autocorrelación serial en los residuos con un nivel de confianza del 95 %.

Tabla 16 Análisis de varianza de los parámetros de los modelos de distribución de tamaño para la descarga del molino (carga de bolas: 45 %).

Modelo de distribución	Efectos principales	Suma de cuadrados	Razón F	Valor-P
Gaudin – Schuhmann	k	Q_a	0,00145	0,17
		Q_b	0,01450	1,71
		α	0,00055	0,06
		Residuo	0,03382	
	m	Q_a	0,00203	1,53
		Q_b	0,00939	7,05
		α	0,00443	3,33
		Residuo	0,00533	
Rosin – Rammler	a	Q_a	0,00071	0,91
		Q_b	0,00260	3,34
		α	0,00058	0,75
		Residuo	0,00311	
	n	Q_a	0,00034	0,14
		Q_b	0,00042	0,18
		α	0,01377	5,80
		Residuo	0,00949	
Función Swebrec	X_{ma} x	Q_a	0,04356	0,75
		Q_b	0,06113	1,06
		α	0,00385	0,07
		Residuo	0,23124	
	X_{50}	Q_a	0,00025	1,12
		Q_b	0,00060	2,76
		α	0,00021	0,94
		Residuo	0,00088	
	b	Q_a	0,00001	0,00

Q_b	0,22909	2,88	0,1649
α	0,10732	1,35	0,3099
Residuo	0,31808		

Tabla 17 Análisis de varianza de los modelos de regresión múltiple para la descarga del molino (carga de bolas: 45 %).

Estadístico	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec		
	k	m	a	n	$x_{\max}$	x_{50}	b
Suma de cuadrados	0,016	0,015	0,004	0,014	0,108	0,001	0,33
Cuadrado medio	0,005	0,005	0,001	0,005	0,036	0,0004	0,11
Razón F	0,65	3,97	1,67	2,04	0,63	1,60	1,41
Valor-P	0,62	0,11	0,31	0,25	0,64	0,32	0,36
R^2 (R^2_{ajustado})	32,79 (0,0)	74,85 (55,98)	55,56 (22,22)	60,48 (30,83)	31,94 (0,0)	54,61 (20,58)	51,40 (14,95)
Error estándar	0,09	0,04	0,03	0,05	0,24	0,01	0,28
Erro absoluto	0,06	0,02	0,02	0,03	0,16	0,01	0,17
EDW* (valor-P)	1,97 (0,69)	0,74 (0,09)	1,99 (0,69)	1,35 (0,37)	1,91 (0,66)	2,00 (0,70)	0,82 (0,13)

*Estadístico Durbin–Watson

En la tabla 18 se muestran los valores de los parámetros de las funciones de distribución de tamaño estimados para el producto recirculado con una carga de bolas del 45 %.

Tabla 18 Valores estimados de los parámetros de las funciones de distribución para el producto recirculado (carga de bolas: 45 %)

Nº	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec		
	k	m	a	n	$x_{\max}$	x_{50}	b
1	1,3133	0,2923	0,2967	0,4066	0,4356	0,1236	1,0374
2	0,4828	0,4026	0,1554	0,5911	0,3041	0,0925	1,0786
3	0,4415	0,4081	0,1437	0,6037	0,2969	0,0869	0,9450
4	3,0542	0,2417	0,5350	0,3260	0,5543	0,1555	0,7051

5	0,3524	0,4853	0,1369	0,7086	0,2736	0,0901	0,9519
6	0,5793	0,3652	0,1680	0,5329	0,3296	0,0935	1,0050
7	0,8884	0,3560	0,2725	0,4772	0,4316	0,1319	0,8569
8	0,2618	1,0437	0,1735	1,3186	0,2484	0,1293	1,7163

La influencia de las variables independientes (Q_a , Q_b y α) en el comportamiento de los parámetros de los modelos de distribución, se realiza mediante el análisis de varianza, tabla 19. Como se observa, los valores-P de los tres factores independientes son mayores a 0,05, por lo que dichos factores no tienen efecto estadísticamente significativo, en los parámetros de los modelos de Gaudin–Schuhmann y Rosin–Rammler, con un nivel de confianza del 95 %.

Tabla 19 Análisis de varianza de los parámetros de los modelos de distribución de tamaño para el producto recirculado (carga de bolas: 45 %).

Modelo de distribución		Efectos principales	Suma de cuadrados	Razón F	Valor-P
Gaudin – Schuhmann	k	Q_a	0,45988	0,61	0,4771
		Q_b	0,23891	0,32	0,6024
		α	2,30770	3,08	0,1540
		Residuo	2,99554		
	m	Q_a	0,03176	0,55	0,4991
		Q_b	0,03270	0,57	0,4932
		α	0,14701	2,55	0,1855
		Residuo	0,23052		
Rosin – Rammler	a	Q_a	0,01690	1,30	0,3172
		Q_b	0,00414	0,32	0,6019
		α	0,05489	4,24	0,1087
		Residuo	0,05183		
	n	Q_a	0,02956	0,38	0,5720
		Q_b	0,04096	0,52	0,5093
		α	0,27354	3,50	0,1348
		Residuo	0,31287		
Función Swebrec	X_{ma} x	Q_a	0,00443	0,78	0,4276
		Q_b	0,00001	0,00	0,9954
		α	0,04931	8,65	0,0423
		Residuo	0,02279		
	X_{50}	Q_a	0,00134	3,34	0,1418
		Q_b	0,00018	0,45	0,5377
		α	0,00139	3,45	0,1367
		Residuo			

	Residuo	0,00161		
	Q_a	0,00282	0,03	0,8759
	Q_b	0,06368	0,62	0,4737
b	α	0,14780	1,45	0,2951
	Residuo	0,40818		

Se obtiene un comportamiento similar al analizar la variabilidad de los parámetros x_{50} y b de la función Swebrec. Sin embargo, el valor-P del factor α para $x_{\max}$ es inferior a 0,05, por lo que este factor tiene un efecto estadísticamente significativo con un nivel de confianza del 95 %. En la tabla A3.5 se presentan los coeficientes de regresión múltiple para cada uno de los parámetros de los modelos de distribución.

Los resultados del análisis de varianza del modelo de regresión múltiple se muestran en la tabla 20. Debido a que los valores-P son superiores a 0,05, no existe una relación estadísticamente significativa entre las variables independientes (Q_a , Q_b y α) con los parámetros de las funciones de Gaudin-Schuhmann, Rosin-Rammler, y los parámetros x_{50} y b de la función Swebrec, con un nivel de confianza del 95 %. Sin embargo, dado a que el valor-P, para el modelo de regresión de $x_{\max}$, es inferior a 0,05 este presenta una relación estadísticamente significativa con la variable independiente α .

Tabla 20 Análisis de varianza de los modelos de regresión múltiple para producto recirculado (carga de bolas: 45 %).

Estadístico	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec		
	k	m	a	n	$x_{\max}$	x_{50}	b
Suma de cuadrados	3,01	0,21	0,08	0,34	0,05	0,003	0,21
Cuadrado medio	1,01	0,07	0,02	0,11	0,05	0,001	0,07
Razón F	1,34	1,22	1,95	1,47	10,87	2,41	0,70
Valor-P	0,38	0,41	0,26	0,35	0,02	0,21	0,60
R^2 (R^2_{ajustado})	50,09 (12,66)	47,85 (8,73)	59,43 (29,01)	52,37 (16,66)	64,43 (58,50)	64,41 (37,73)	34,43 (0,00)
Error estándar	0,86	0,24	0,11	0,28	0,06	0,02	0,32

Erro absoluto	0,49	0,14	0,07	0,16	0,03	0,01	0,18
EDW*	1,19	0,95	1,57	0,96	1,73	2,17	1,01
(valor-P)	(0,29)	(0,18)	(0,49)	(0,18)	(0,41)	(0,77)	(0,21)

*Estadístico Durbin-Watson

El modelo de regresión que relaciona el parámetro $x_{\max}$ de la función Swebrec con el factor independientes se presenta en la ecuación (45):

$$x_{\max} = 0,3593 - 0,0785 \cdot \alpha \quad (45)$$

El estadístico R^2 indica que el modelo así ajustado explica el 64,43 % de la variabilidad de " $x_{\max}$ ". El estadístico R^2 ajustado, que es el estadístico más apropiado para comparar modelos con diferentes números de variables independientes es 58,50 %. Además, el modelo propuesto presenta un error absoluto del 0,03.

El estadístico de Durbin-Watson (EDW) examinan los residuos para determinar si hay alguna correlación significativa basada en el orden en el que se presentan en el archivo de datos. Puesto que el valor-P es mayor que 0,05, no hay indicación de una autocorrelación serial en los residuos con un nivel de confianza del 95 %.

En la figuras 10 se muestra la relación entre los valores del parámetro " $x_{\max}$ " y los valores determinados a partir del modelos de regresión (ecuación 45), en ellas se demuestra una estrecha relación entre los valores observados y los valores modelados.

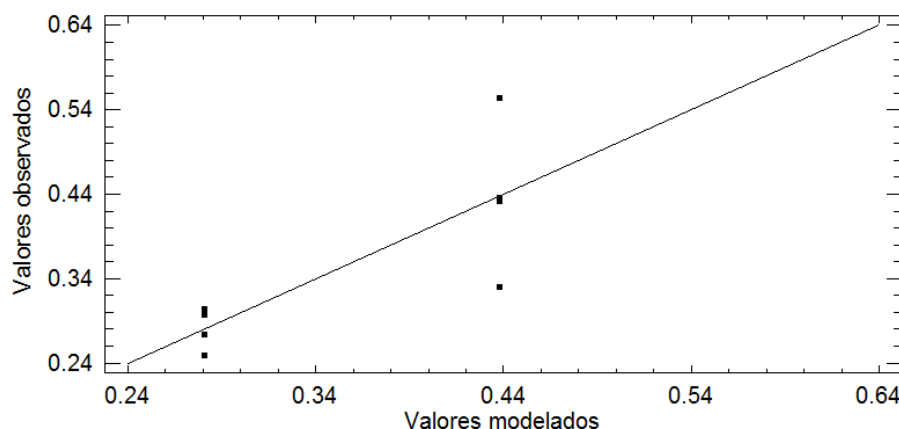


Figura 10 Correlación entre los valores de " $x_{\max}$ " observados y los valores obtenidos por el modelo 45.

La tabla 21 muestra los valores de los parámetros de las funciones de distribución de tamaño estimados para el producto final con una carga de bolas del 45 %. En ella se observa la amplia variabilidad de los valores numéricos de estos parámetros, independientemente del modelo tratado, en dependencia de los regímenes de trabajo.

Los resultados de los análisis de varianza, que descomponen la variabilidad de cada uno de los parámetros de los modelos de distribución en las contribuciones debido a los tres factores o variables independientes, se muestran en la tabla 22. Los valores-P comprueban la importancia estadística de cada uno de los factores.

Tabla 21 Valores estimados de los parámetros de las funciones de distribución para el producto final (carga de bolas: 45 %)

Nº	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec		
	k	m	a	n	$x_{\max}$	x_{50}	b
1	0,1726	0,2105	0,0285	0,6954	0,1805	0,0108	1,4149
2	0,1801	0,1581	0,0224	0,6487	0,1855	0,0052	1,3886
3	0,1561	0,1871	0,0289	0,8888	0,1588	0,0078	1,3675
4	0,1674	0,2276	0,0311	0,7548	0,1744	0,0128	1,4186
5	0,1548	0,2133	0,0286	0,7929	0,1596	0,0104	1,3578
6	0,1679	0,2430	0,0338	0,7907	0,1751	0,0148	1,4373
7	0,1658	0,2117	0,0304	0,7957	0,1708	0,0110	1,4116
8	0,1894	0,1647	0,0229	0,6142	0,1970	0,0061	1,4077

Como se observa, los valores-P de los tres factores independientes, para los parámetros de las funciones de Gaudin–Schuhmann y Rosin–Rammler, son mayores a 0,05, por lo que dichos factores no tienen efectos estadísticamente significativos, en el comportamiento (variabilidad) de los parámetros de estas funciones, con un nivel de confianza del 95 %. Se obtiene un comportamiento similar al analizar la variabilidad del parámetro $x_{\max}$ de la función Swebrec.

Sin embargo, los valores-P de los factores α , para el parámetro x_{50} , Q_b y α , para el parámetro b, son inferiores a 0,05, por lo que estos factores tienen efectos estadísticamente significativos, en la variabilidad de dichos parámetros, con un nivel de confianza del 95 %.

En la tabla A3.6 se presentan los coeficientes de regresión múltiple para cada uno de los parámetros de los modelos de distribución de tamaño. Los resultados del análisis de varianza del modelo de regresión múltiple se muestran en la tabla 23. Debido a que los valores-P son superiores a 0,05, no existe una relación estadísticamente significativa entre las variables independientes (Q_a , Q_b y α) con los parámetros de las funciones de Gaudin-Schuhmann, Rosin-Rammler, y el parámetro x_{max} de la función Swebrec, con un nivel de confianza del 95 %. Sin embargo, considerando a que los valores-P, para los modelos de regresión de x_{50} y b , son inferiores a 0,05 estos presentan una relación estadísticamente significativa con las variables independientes α y Q_b y α .

Tabla 22 Análisis de varianza de los parámetros de los modelos de distribución de tamaño para el producto final (carga de bolas: 45 %).

Modelo de distribución	Efectos principales	Suma de cuadrados	Razón F	Valor-P
Gaudin - Schuhmann	k	Q_a	0,01	0,9250
		Q_b	2,84	0,1671
		α	0,04	0,8487
		Residuo		0,00054
	m	Q_a	0,25	0,6462
		Q_b	0,18	0,6906
		α	6,18	0,0677
		Residuo		0,00232
Rosin - Rammler	a	Q_a	0,00	1,0000
		Q_b	0,41	0,5574
		α	4,69	0,0963
		Residuo		0,00004
	n	Q_a	0,21	0,6673
		Q_b	1,80	0,2508
		α	0,11	0,7518
		Residuo		0,03687
Función Swebrec	x_{ma} x	Q_a	0,00	0,9938
		Q_b	2,96	0,1607
		α	0,00	0,9979
		Residuo		0,00065
	x_{50}	Q_a	0,25	0,6429
		Q_b	0,02	0,8826
		α	8,10	0,0466
		Residuo		0,00002

b	Q _a	0,00001	0,04	0,8563
	Q_b	0,00126	8,13	0,0464
	α	0,00323	20,84	0,0103
	Residuo	0,00062		

El modelo de regresión que relaciona los parámetros x_{50} y b de la función Swebrec con los factores independientes α y Q_b y α se presenta en la ecuación (46) y (47):

$$x_{50} = 0,0099 + 0,0025 \cdot \alpha \quad (46)$$

$$b = 1,4005 - 0,0125 \cdot Q_b + 0,0201 \cdot \alpha \quad (47)$$

Tabla 23 Análisis de varianza de los modelos de regresión múltiple para producto final (carga de bolas: 45 %).

Estadístico	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec		
	k	m	a	n	x_{max}	x_{50}	b
Suma de cuadrados	3×10^{-4}	3×10^{-3}	5×10^{-5}	0,02	4×10^{-4}	4×10^{-5}	4×10^{-3}
Cuadrado medio	1×10^{-4}	1×10^{-3}	1×10^{-5}	0,01	1×10^{-4}	4×10^{-5}	2×10^{-3}
Razón F	0,96	2,20	1,70	0,71	0,99	11,37	17,94
Valor-P	0,49	0,23	0,30	0,59	0,48	0,01	0,005
R² (R² ajustado)	47,98 (0,00)	62,31 (34,03)	56,03 (23,05)	34,74 (0,00)	42,49 (0,00)	65,46 (59,71)	87,77 (82,88)
Error estándar	0,01	0,02	0,003	0,09	0,01	0,002	0,01
Erro absoluto	0,01	0,01	0,002	0,05	0,01	0,001	0,007
EDW* (valor-P)	0,69 (0,08)	0,88 (0,15)	1,19 (0,29)	1,23 (0,31)	0,73 (0,09)	1,09 (0,11)	1,10 (0,22)

*Estadístico Durbin–Watson

El valor estadístico R^2 indica que los modelos así ajustados explican el 65,46 % y 87,77 % de la variabilidad de x_{50} y b , respectivamente. El estadístico R^2 ajustado, que es el estadístico más apropiado para comparar modelos con diferentes números de variables independientes es 59,71 % y 82,88 %. Además, los modelos propuestos presentan errores absolutos del 0,001 y 0,007 respectivamente.

A demás, el estadístico de Durbin-Watson (EDW), examina los residuos para determinar si hay alguna correlación significativa basada en el orden en el que se presentan en el archivo de datos. Puesto que el valor-P es mayor que 0,05, no hay indicación de una autocorrelación serial en los residuos con un nivel de confianza del 95 %.

En las figuras 11 y 12 se muestra la relación entre los valores de los parámetros x_{50} y b y los valores determinados a partir de los modelos de regresión (ecuaciones 46 y 47), en ellas se observa una estrecha relación entre los valores observados y los valores modelados.

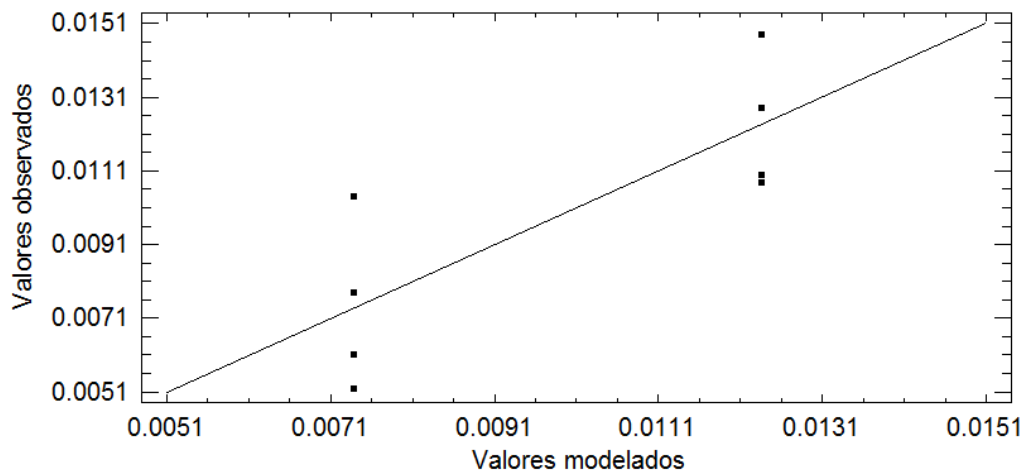


Figura 11 Correlación entre los valores de " x_{50} " observados y los valores obtenidos por el modelo 46.

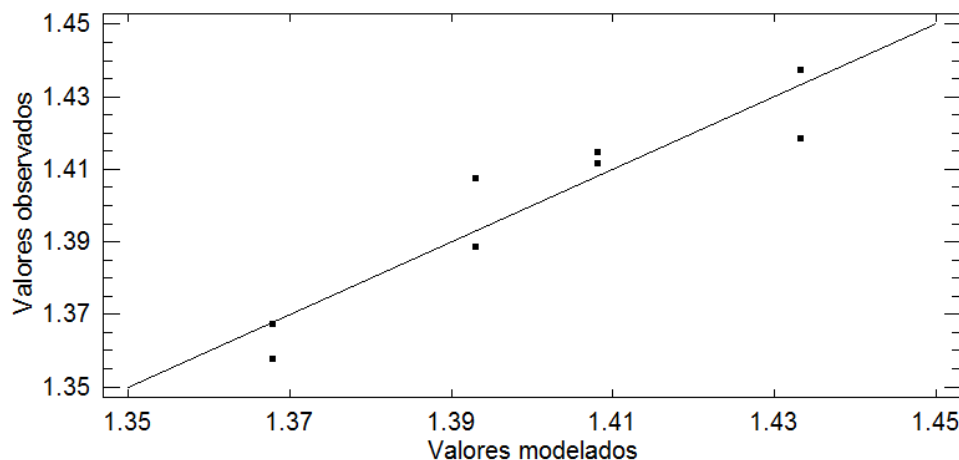


Figura 12 Correlación entre los valores de "b" observados y los valores obtenidos por el modelo 47.

3.3 Validación estadística de los modelos de distribución

En la tabla 24 se muestran los resultados del análisis de la homogeneidad de las varianzas realizado para los contenidos de las clases granulométricas recalculadas y las obtenidas por las funciones de distribución, con una carga de bolas del 40 %.

Según el valor del criterio de Cochran (C) y su valor crítico, en el modelo de Rosin–Rammler para la descarga del molino, la diferencia de la varianza máxima, con respecto a las otras, resulta importante, es decir, la serie de datos cuya varianza es máxima, es menos exacto que los demás; sin embargo, para los modelos de Gaudin–Schuhmman y Swebrec no existe una diferencia significativa en la varianza entre los valores de los contenidos de las clases granulométricas recalculadas y las obtenidas por estas funciones de distribución.

Se observa un comportamiento similar en el análisis de varianza, de los tres modelos de distribución, para el producto recirculado y el producto final. Consecuentemente, el tipo de modelo de distribución, determinará la calidad de ajuste de los valores de los contenidos acumulativos.

Tabla 24 Análisis de la homogeneidad de las varianzas de los modelos de distribución para la descarga del molino, el producto recirculado y el producto final con una carga de bolas del 40 %.

Vari anza	Gaudin – Schuhmann			Rosin - Rammler			Función Swebrec		
	f'_r	c_r	p_r	f'_r	c_r	p_r	f'_r	c_r	p_r
S^2_1	0,3288	1,3255	1,1852	0,0060	1,6781	0,0339	3,1780	0,6546	4,0084
S^2_2	2,4118	5,9856	1,2365	1,3414	5,8825	0,1013	3,6894	7,2230	4,3392
S^2_3	0,0255	0,2567	0,0096	12,008	0,2014	0,4063	0,7744	7,5381	1,9920
S^2_4	5,3650	2,2753	6,1152	0,0251	2,9953	0,0202	14,373	1,4586	14,888
S^2_5	0,1385	0,4546	0,0654	0,2111	0,6150	0,1148	0,6051	0,4363	0,4329
S^2_6	0,1485	0,1246	0,2454	0,0538	0,0005	0,6565	2,9562	1,1484	2,9093
S^2_7	0,4124	0,1586	1,1828	0,7196	0,2786	4,6812	1,7578	0,2798	4,0957
S^2_8	0,2672	3,1765	2,4546	0,0167	2,2965	6,8742	1,3899	6,4838	7,7748
$S^2_{\max}$	5,3650	5,9856	6,1152	12,008	5,8825	6,8742	14,373	7,5381	14,888
ΣS^2	9,0977	13,757	12,495	14,382	13,948	12,888	28,724	25,223	40,441

C_{cal}	0,5897	0,4351	0,4894	0,8350	0,4218	0,5334	0,5004	0,2989	0,3682
C_{tab}	0,6798	0,6798	0,6798	0,6798	0,6798	0,6798	0,6798	0,6798	0,6798

La tabla 25 muestra los resultados de los análisis estadísticos (R^2 y σ) realizado entre los contenidos de los productos recalculados (descarga del molino " f_r ", producto recirculado " c_r " y producto final " p_r ") y los valores, de estos, obtenidos por los modelos de distribución para un 40 % de carga de bolas.

Los valores de los coeficientes de correlación R^2 , muestran que a pesar del tipo de modelo de distribución de tamaño, en todo los casos, existe un alto grado de dependencia lineal entre valores de los contenidos de las clases granulométricas recalculadas y las obtenidas por las funciones de distribución, con una carga de bolas del 40 %. Siendo el modelo de Rosin–Rammler el de mayor linealidad para la descarga del molino ($R^2=0,9940$) y el modelo de Gaudin–Schuhmman para el producto final ($R^2=9906$), mientras que, para el producto recirculado, ambos modelos presentan la misma correlación lineal con un valor de $R^2=0,9286$.

Tabla 25 Análisis estadístico de los resultados obtenidos por los modelos para la descarga del molino, producto recirculado y producto final (carga de bolas: 40 %).

Nº	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec	
	R^2	σ	R^2	σ	R^2	σ
Descarga del molino						
1	0,9970	0,5734	0,9999	0,0777	0,9982	1,7827
2	0,9701	1,5530	0,9832	1,1582	0,9719	1,9208
3	0,9993	0,1597	1,0000	3,4653	0,9995	0,8800
4	0,9891	2,3163	0,9999	0,1583	0,9942	3,7912
5	0,9890	0,3721	0,9833	0,4594	0,9879	0,7779
6	0,9986	0,3853	0,9995	0,2319	0,9993	1,7194
7	0,9922	0,6422	0,9863	0,8483	0,9917	1,3258
8	0,9976	0,5169	0,9998	0,1291	0,9978	1,1789
Media	0,9916	0,8149	0,9940	0,8160	0,9926	1,6721
Producto recirculado						
1	0,9821	1,1513	0,9769	1,2954	0,9941	0,8091
2	0,5287	2,4465	0,5358	2,4254	0,4835	2,6876
3	0,9878	0,5067	0,9904	0,4487	0,9727	2,7456
4	0,9784	1,5084	0,9709	1,7307	0,9924	1,2077
5	0,9891	0,6743	0,9851	0,7842	0,9976	0,6606

6	0,9991	0,3530	1,0000	0,0227	0,9927	1,0717
7	0,9966	0,3982	0,9940	0,5278	1,0000	0,5290
8	0,9670	1,7823	0,9756	1,5154	0,9465	2,5463
Media	0,9286	1,1026	0,9286	1,0938	0,9224	1,5322
Producto final						
1	0,9903	1,0887	0,9997	0,1842	0,9956	2,0021
2	0,9918	1,1120	0,9994	0,3182	0,9965	2,0831
3	0,9998	0,0977	0,9919	0,6374	0,9988	1,4114
4	0,9881	2,4729	1,0000	0,1422	0,9941	3,8585
5	0,9913	0,2557	0,9848	0,3388	0,9897	0,6580
6	0,9974	0,4954	0,9934	0,8103	0,9998	1,7057
7	0,9821	1,0876	0,9340	2,1636	0,9712	2,0238
8	0,9837	1,5667	0,9545	2,6219	0,9772	2,7883
Media	0,9906	1,0221	0,9822	0,9021	0,9904	2,0664

Considerando el valor promedio del error de reproducibilidad (σ), el modelo de mejor ajuste, para la descarga del molino, fue el modelo de Gaudin–Schuhmann, con un valor promedio de 0,8149 % y para el producto recirculado y producto final, fue el modelo de Rosin–Rammler, con valores promedios de 1,0928 % y 0,902 % respectivamente.

Por tanto, de acuerdo a los resultados del análisis anterior, se propone que los modelos de distribución de tamaño de partículas, para la caracterización granulométrica de los productos de la molienda del mineral laterítico, en molinos de bolas con una carga de bolas del 40 % sean:

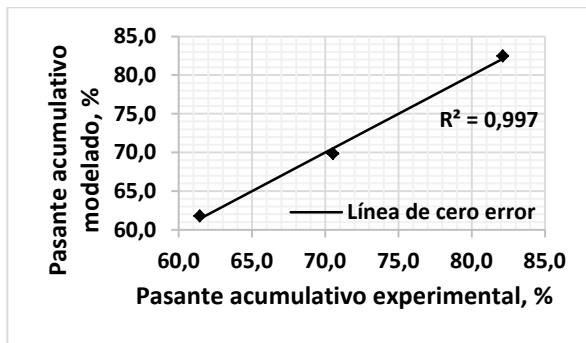
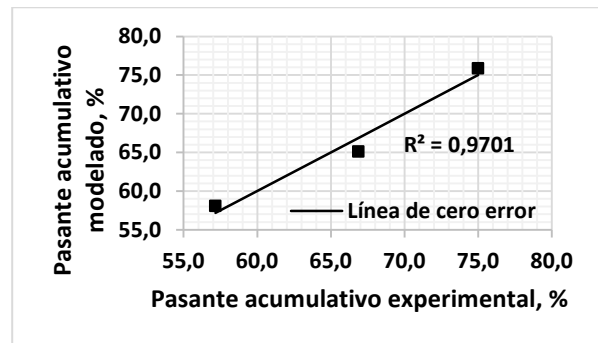
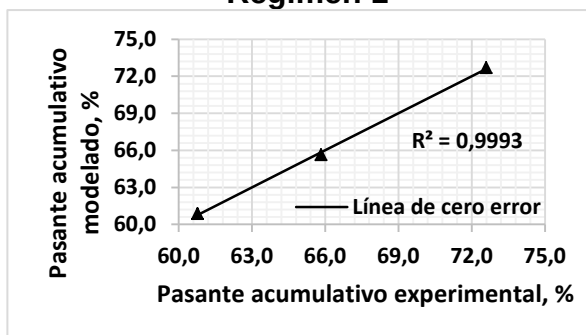
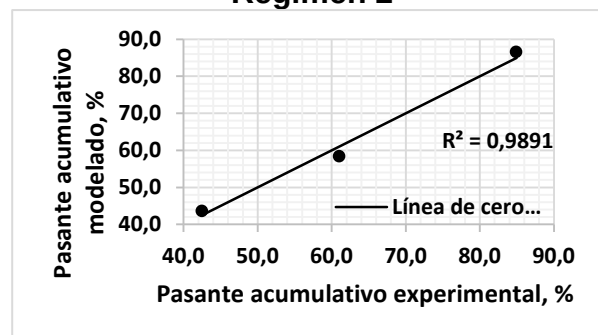
- Descarga del molino: Función de Gaudin–Schuhmann.
- Producto recirculado: Función de Rosin–Rammler.
- Producto final: Función de Rosin–Rammler.

La figura 13 muestra la relación entre los valores de los contenidos de las clases granulométricas modelados, mediante la función de Gaudin–Schuhmann, y los valores de los contenidos de las clases granulométricas recalculadas (experimentales), para la descarga del molino con una carga de bolas del 40 %, obteniéndose un coeficiente de correlación promedio de 0,9916, lo que demuestra la

similitud entre los valores obtenidos por el modelo y los datos experimentales recalculados.

En el caso del producto recirculado para una carga de bolas del 40 %, el coeficiente de correlación promedio es de 0,9286, lo que demuestra la similitud entre los valores de los contenidos de las clases granulométricas modelados, mediante la función de Rosin–Rammler, y los valores de los contenidos de las clases granulométricas recalculadas (experimentales), figura 14.

Así mismo, para el producto final con una carga de bolas del 40 %, los valores modelados, mediante la función de Rosin–Rammler, y valores experimentales de los contenidos de las clases granulométricas son similares, figura 15, puesto que, el valor promedio del coeficiente de correlacion es igual a 0,9822.

**Régimen 1****Régimen 2****Régimen 3****Régimen 4**

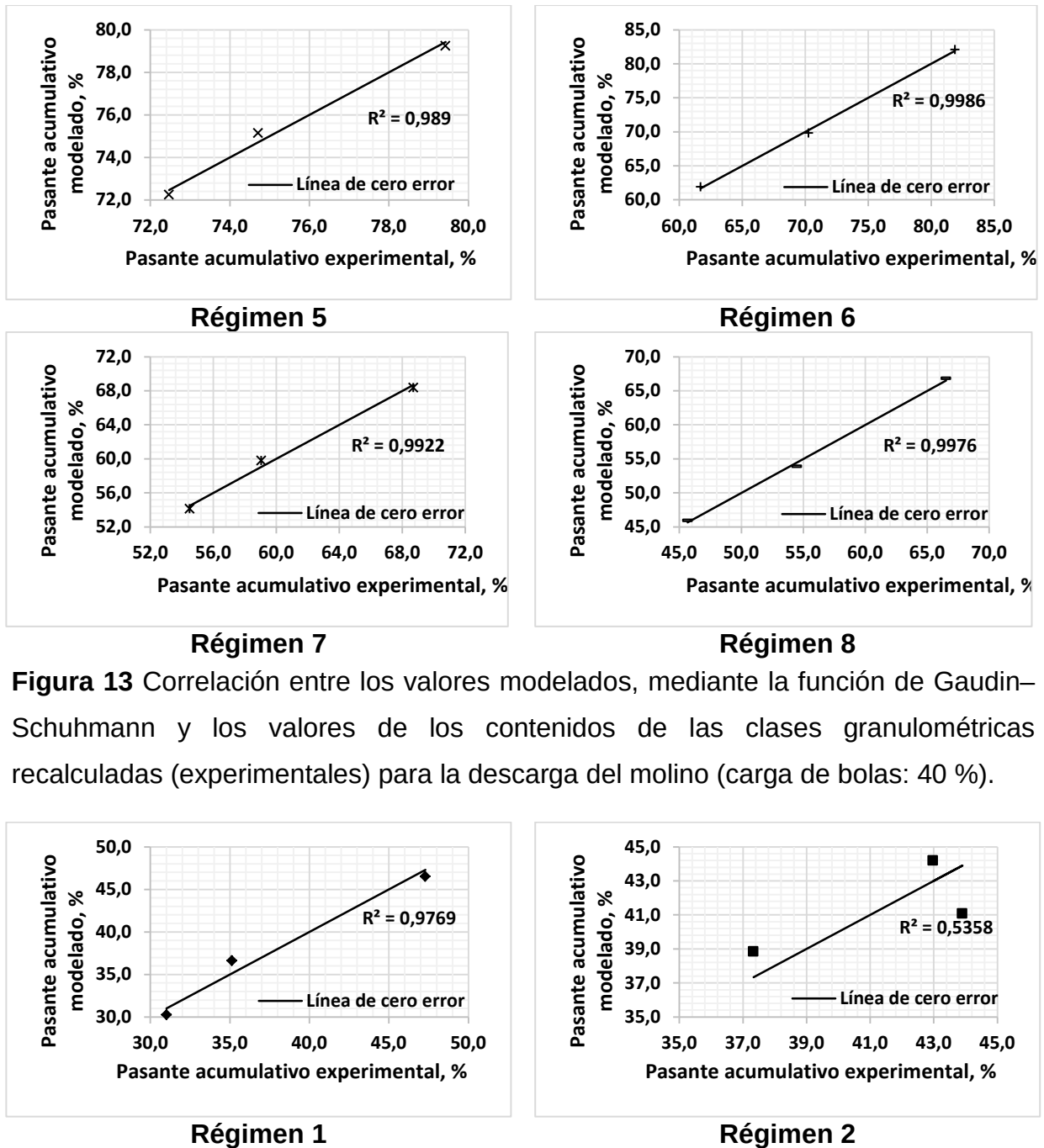


Figura 13 Correlación entre los valores modelados, mediante la función de Gaudin–Schuhmann y los valores de los contenidos de las clases granulométricas recalculadas (experimentales) para la descarga del molino (carga de bolas: 40 %).

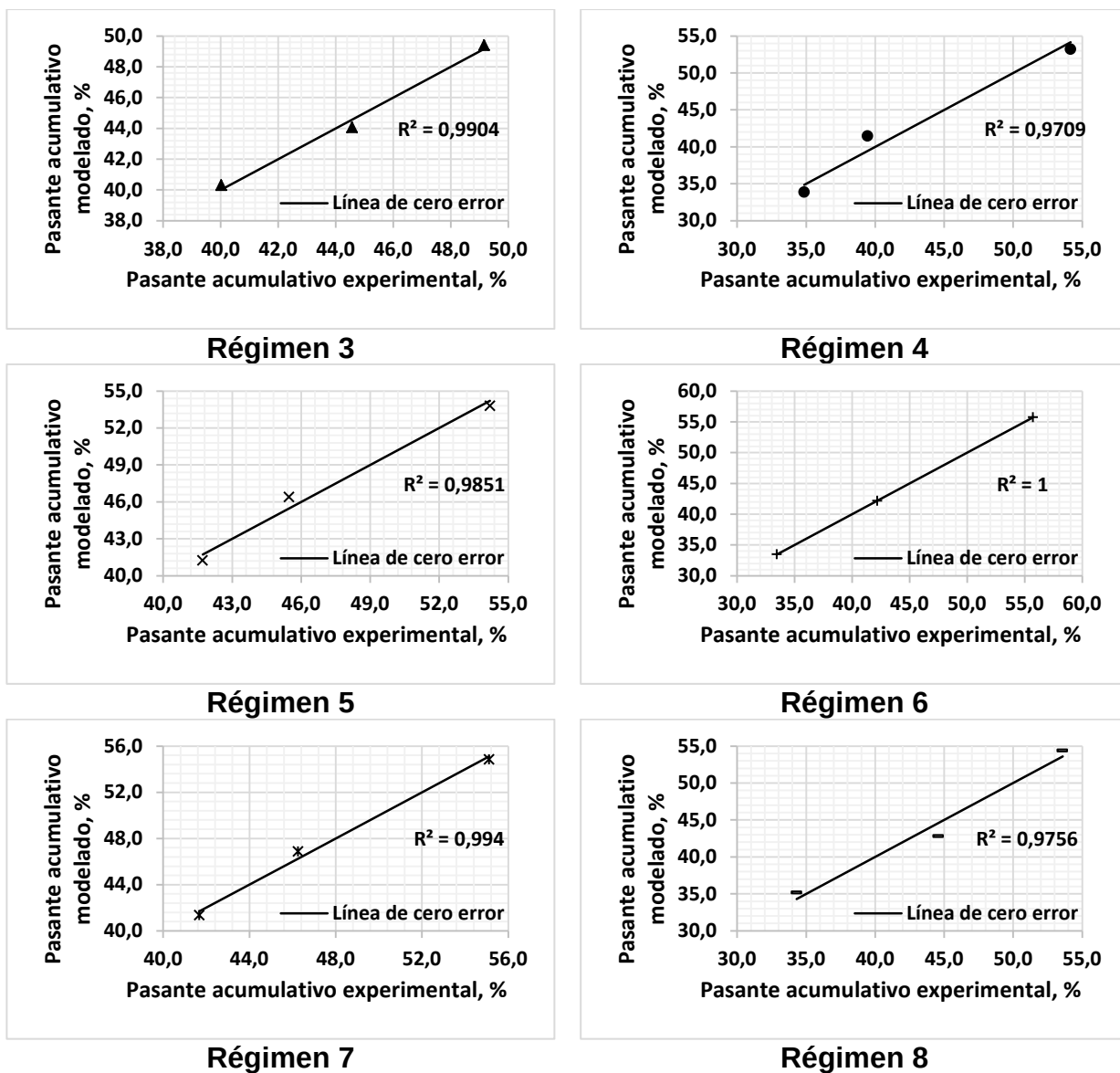
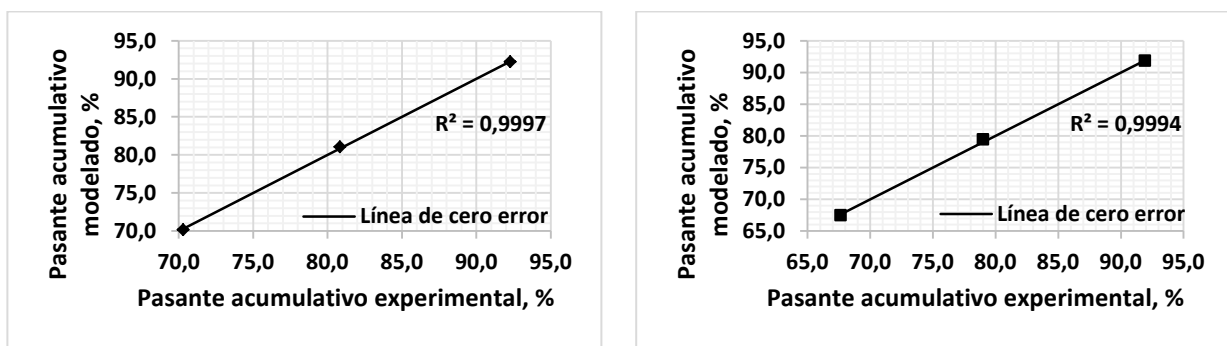


Figura 14 Correlación entre los valores modelados, mediante la función de Rosin–Rammler y los valores de los contenidos de las clases granulométricas recalculadas (experimentales) para el producto recirculado (carga de bolas: 40 %).



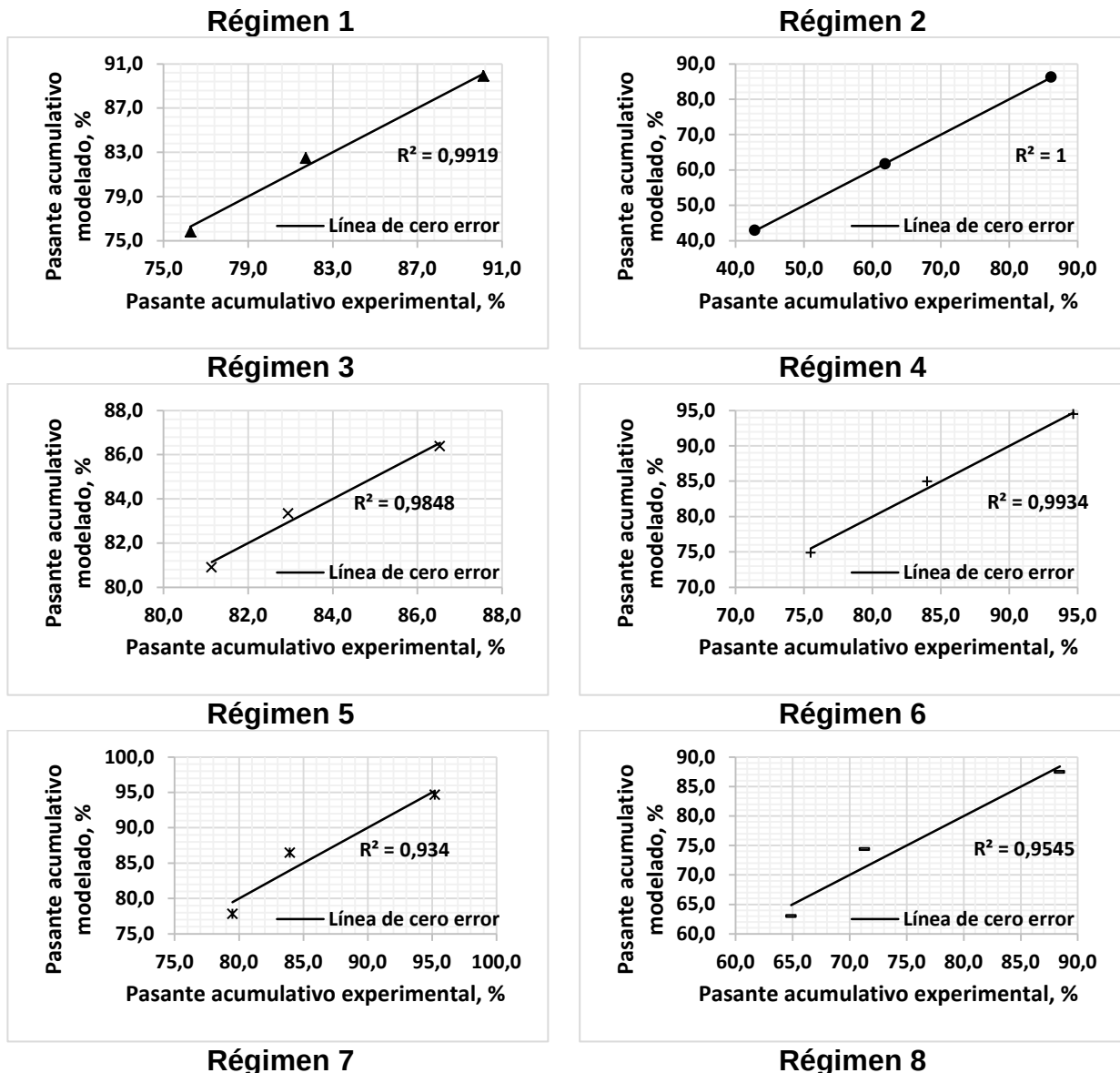


Figura 15 Correlación entre los valores modelados, mediante la función de Rosin–Rammler y los valores de los contenidos de las clases granulométricas recalculadas (experimentales) para el producto final (carga de bolas: 40 %).

De manera analoga, en la tabla 26 se muestran los resultados del análisis de la homogeneidad de las varianzas realizado para los contenidos de las clases granulométricas recalculadas y las obtenidas por las funciones de distribución, para la molienda de mineral laterítico con una carga de bolas del 45 %.

Tabla 26 Análisis de la homogeneidad de las varianzas de los modelos de distribución para la descarga del molino, el producto recirculado y el producto final con una carga de bolas del 45 %.

Vari anza	Gaudin – Schuhmann			Rosin - Rammler			Función Swebrec		
	f'_r	c_r	p_r	f'_r	c_r	p_r	f'_r	c_r	p_r
S^2_1	2,0147	7,5994	5,8978	0,3013	8,4540	0,5192	4,7533	7,7963	7,1690
S^2_2	3,2464	4,1222	0,0013	5,0362	5,9351	2,2105	18,363	2,2518	2,5144
S^2_3	0,0892	0,4287	0,2112	0,8974	1,2795	5,2861	5,3677	0,9941	3,2302
S^2_4	0,6853	6,8651	5,1851	0,0355	7,3198	0,0800	3,3738	9,1569	6,6223
S^2_5	4,4881	0,1742	10,819	1,1295	0,0565	1,1908	7,3667	4,3295	12,155
S^2_6	0,7323	2,4525	2,8382	1,7277	3,6269	0,2275	2,2081	1,2136	4,8323
S^2_7	0,8088	1,6561	0,5029	0,0830	1,1042	2,3066	3,3484	4,3751	3,2642
S^2_8	4,5985	16,153	0,0168	9,2619	20,053	1,5155	3,1361	5,3573	2,5814
$S^2_{\max}$	4,5985	16,153	10,819	9,2619	20,053	5,2861	18,363	9,1569	12,155
ΣS^2	16,663	39,451	25,473	18,473	47,829	13,336	47,917	35,475	42,369
C_{cal}	0,2760	0,4094	0,4248	0,5014	0,4193	0,3964	0,3832	0,2581	0,2869
C_{tab}	0,6798	0,6798	0,6798	0,6798	0,6798	0,6798	0,6798	0,6798	0,6798

En este caso, según los valores de los criterios de Cochran (C) y su valor crítico, para cada modelo y tipo de producto, no existe diferencia significativa en la varianza entre los valores de los contenidos de los tamaños experimentales ajustados y los determinados por los modelos. Consecuentemente, el tipo de modelo de distribución, determinará la calidad de ajuste de los valores de los contenidos acumulativos.

La tabla 27 muestra los resultados de los análisis estadísticos (R^2 y σ) realizados entre los contenidos de los productos recalculados (descarga del molino " f'_r ", producto recirculado " c_r " y producto final " p_r ") y los valores, de estos, obtenidos por los modelos de distribución para un 45 % de carga de bolas.

Los valores promedio de R^2 de cada uno de los modelos, (Gaudin–Schuhmann, Rosin–Rammler y Swebrec), para la descarga del molino con una carga de bolas del 45 %, están ligeramente por debajo que los valores promedio de R^2 , con respecto al mismo tipo de producto, con una carga de bolas del 40 %. Se observa un comportamiento contrario para el producto recirculado; mientras que, para el producto final, los valores promedio de R^2 para los modelos de Gaudin–Schuhmann y

la función Swebrec, para el 45 % de carga de bolas, presentarán valores por debajo, de los correspondientes para una carga de bolas del 40 %, no siendo así, el modelo de Rosin–Rammler.

Tabla 27 Análisis estadístico de los resultados obtenidos por los modelos para la descarga del molino, producto recirculado y producto final (carga de bolas: 45 %).

Nº	Gaudin – Schuhmann		Rosin – Rammler		Función Swebrec	
	R ²	σ	R ²	σ	R ²	σ
Descarga del molino						
1	0,9817	1,4194	0,9973	0,5489	0,9869	2,1802
2	0,9790	1,8018	0,9663	2,2441	0,9811	4,2851
3	0,9994	0,2986	0,9936	0,9473	0,9987	2,3168
4	0,9934	0,8278	0,9997	0,1885	0,9953	1,8368
5	0,9724	2,1185	0,9930	1,0628	0,9780	2,7142
6	0,9947	0,8557	0,9872	1,3144	0,9953	1,4860
7	0,9927	0,8993	0,9992	0,2882	0,9943	1,8299
8	0,9786	2,1444	0,9555	3,0433	0,9942	1,7709
Media	0,9865	1,2957	0,9865	1,2047	0,9905	2,3025
Producto recirculado						
1	0,9053	2,7567	0,8928	2,9076	0,9389	2,7922
2	0,9759	2,0303	0,9641	2,4362	0,9913	1,5006
3	0,9975	0,6547	0,9924	1,1312	0,9999	0,9970
4	0,8630	2,6201	0,8524	2,7055	0,8980	3,0260
5	0,9993	0,4174	0,9997	0,2378	0,9927	2,0808
6	0,9820	1,5660	0,9726	1,9044	0,9946	1,1017
7	0,9814	1,2869	0,9873	1,0508	0,9652	2,0917
8	0,9783	4,0190	0,9677	4,4780	0,9925	2,3146
Media	0,9603	1,9189	0,9536	2,1064	0,9716	1,9881
Producto final						
1	0,9524	2,4285	0,9962	0,7205	0,9695	2,6775
2	1,0000	0,0355	0,9739	1,4868	0,9982	1,5857
3	0,9980	0,4596	0,9614	2,2991	0,9998	1,7973
4	0,9636	2,2771	0,9995	0,2828	0,9791	2,5734
5	0,9199	3,2893	0,9927	1,0912	0,9452	3,4865
6	0,9820	1,6847	0,9987	0,4769	0,9924	2,1983
7	0,9960	0,7091	0,9843	1,5188	0,9999	1,8067
8	0,9998	0,1298	0,9824	1,2310	0,9993	1,6067
Media	0,9764	1,3767	0,9861	1,1384	0,9854	2,2165

De lo anterior, se deduce, que en todos los casos, se conserva el alto grado de dependencia lineal entre los valores de pasante acumulativo experimental ajustado y los obtenidos por los modelos, confirmando lo planteado por Kelly y Spottiswood

(1982) y Álvarez, et al. (2016), que en la mayoría de los casos, los valores de los contenidos de las clases granulométricas, productos de la reducción de tamaño, pueden ser lineales en la mayor parte del rango de tamaño, particularmente en los tamaños finos.

En cuanto a los resultados del análisis del valor promedio del error de reproducibilidad (σ), el modelo de mejor ajuste, para la descarga del molino y producto producto final, fue el modelo de Rosin - Rammler, cuyos valores medios fueron de 1,2047 % y 1,1384 % respectivamente; y para el producto recirculado, el modelo que mejor ajuste presentó fue el modelo de Gaudin–Schuhmann con un valor medio de 1,9189 %.

Por tanto, de acuerdo a los resultados del análisis anterior, se propone que los modelos de distribución de tamaño de partículas, para la caracterización granulométrica de los productos de la molienda del mineral laterítico, para la molienda en molinos de bolas con una carga de estos del 45 % sean:

- Descarga del molino: Función de Rosin–Rammler.
- Producto recirculado: Funcion de Gaudin–Schuhmann.
- Producto final: Función de Rosin–Rammler.

Las figuras 16,17 y 18 muestran la relación entre los valores de los contenidos de las clases granulométricas modelados, mediante la función de Rosin–Rammler, y los valores de los contenidos de las clases granulométricas recalculadas (experimentales), para la descarga del molino y el producto final, con una carga de bolas del 45 %, obteniéndose valores de los coeficiente de correlación promedios de 0,9865 y 0,9861 respectivamente, lo que demuestra la similitud entre los valores obtenidos por los modelos y los datos experimentales recalculados. Así mismo, para el producto recirculado, para carga de bolas del 45 %, los valores modelados, mediante la función de Gaudin–Schuhmann, y valores experimentales recalculados son similares, figura 15, con un valor promedio del coeficiente de correlacion de 0,9603.

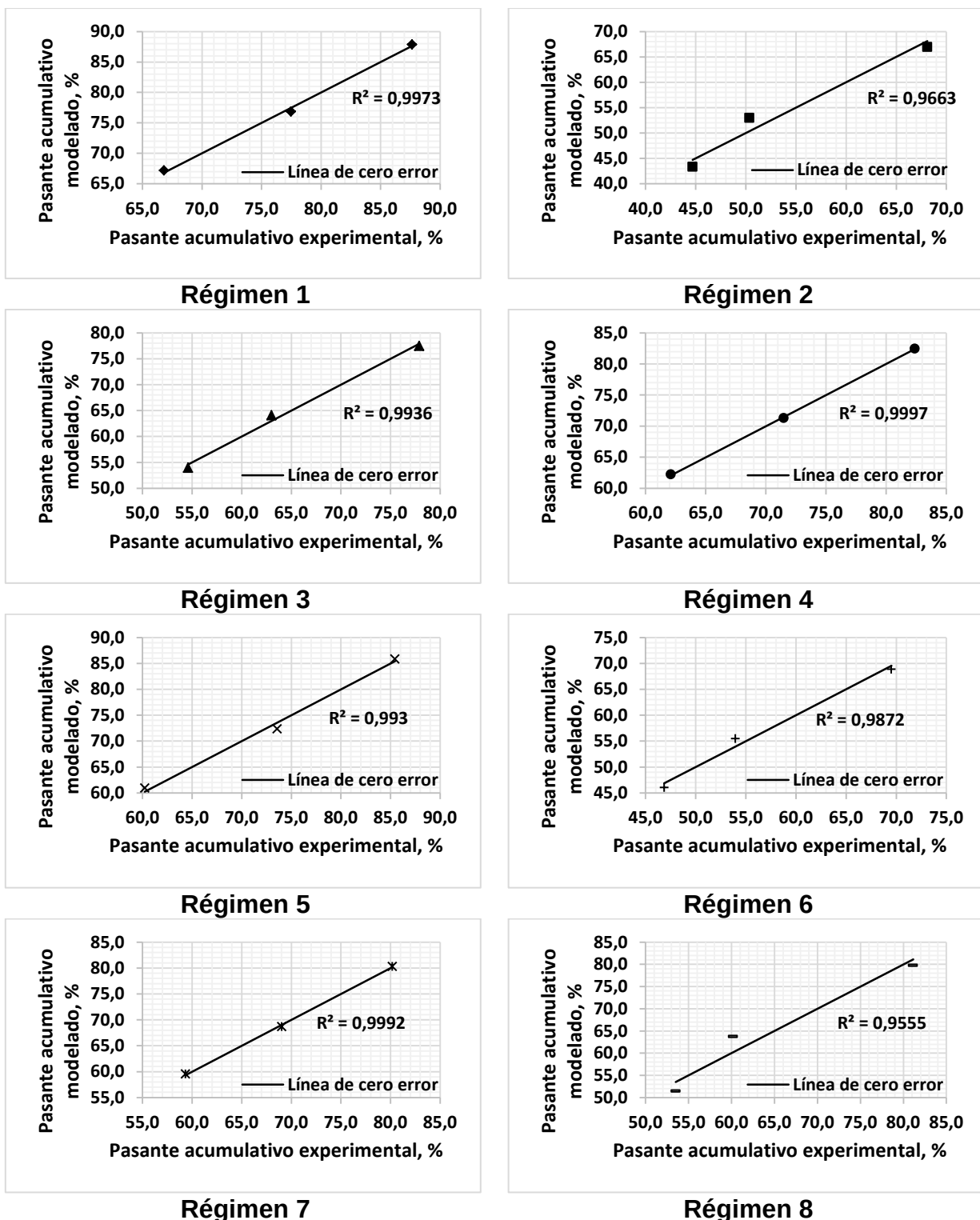


Figura 16 Correlación entre los valores modelados, mediante la función de Rosin–Rammler y los valores de los contenidos de las clases granulométricas recalculadas (experimentales) para la descarga del molino (carga de bolas: 45 %).

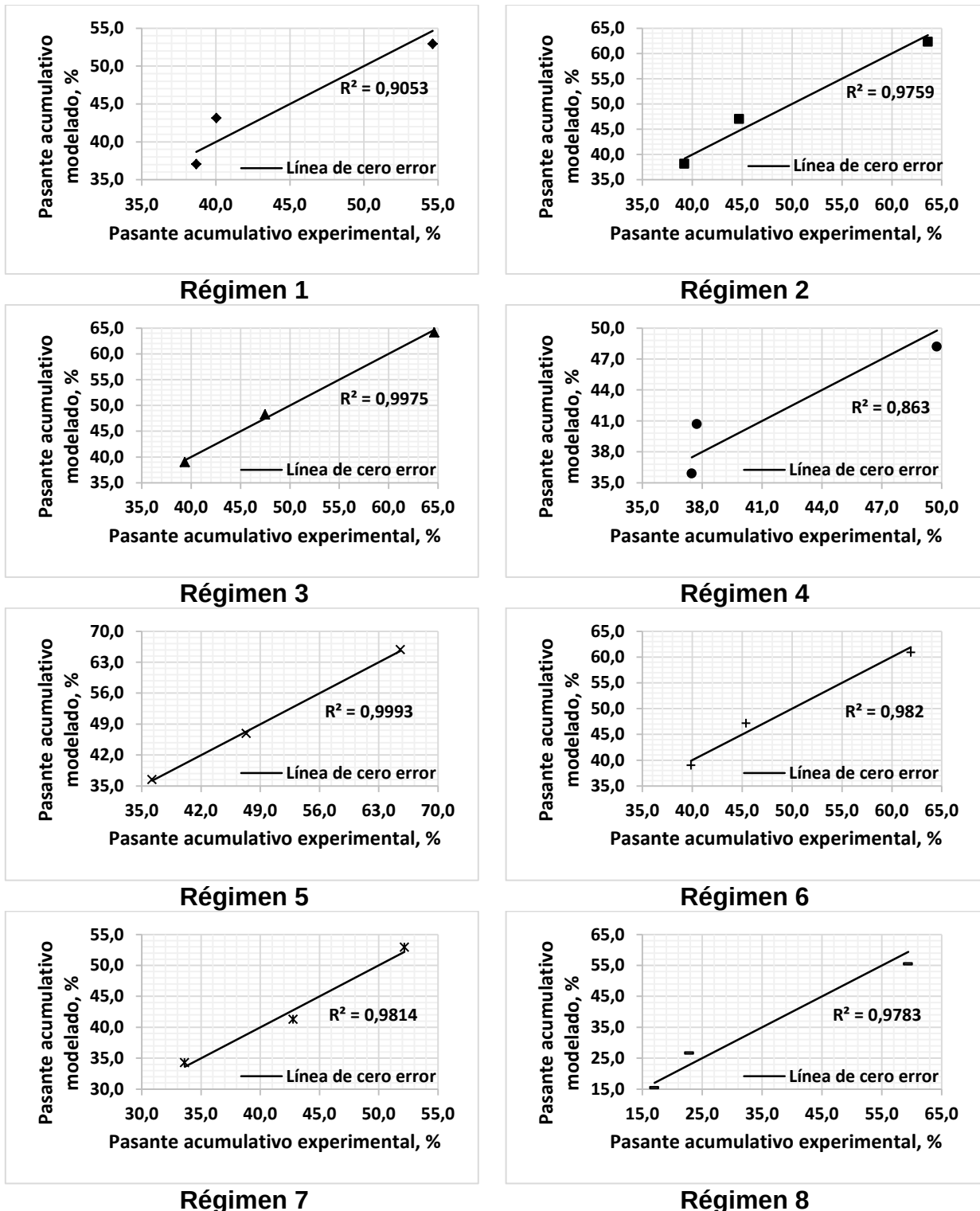


Figura 17 Correlación entre los valores modelados, mediante la función de Gaudin–Schuhmann y los valores de los contenidos de las clases granulométricas recalculadas (experimentales) para el producto recirculado (carga de bolas: 45 %).

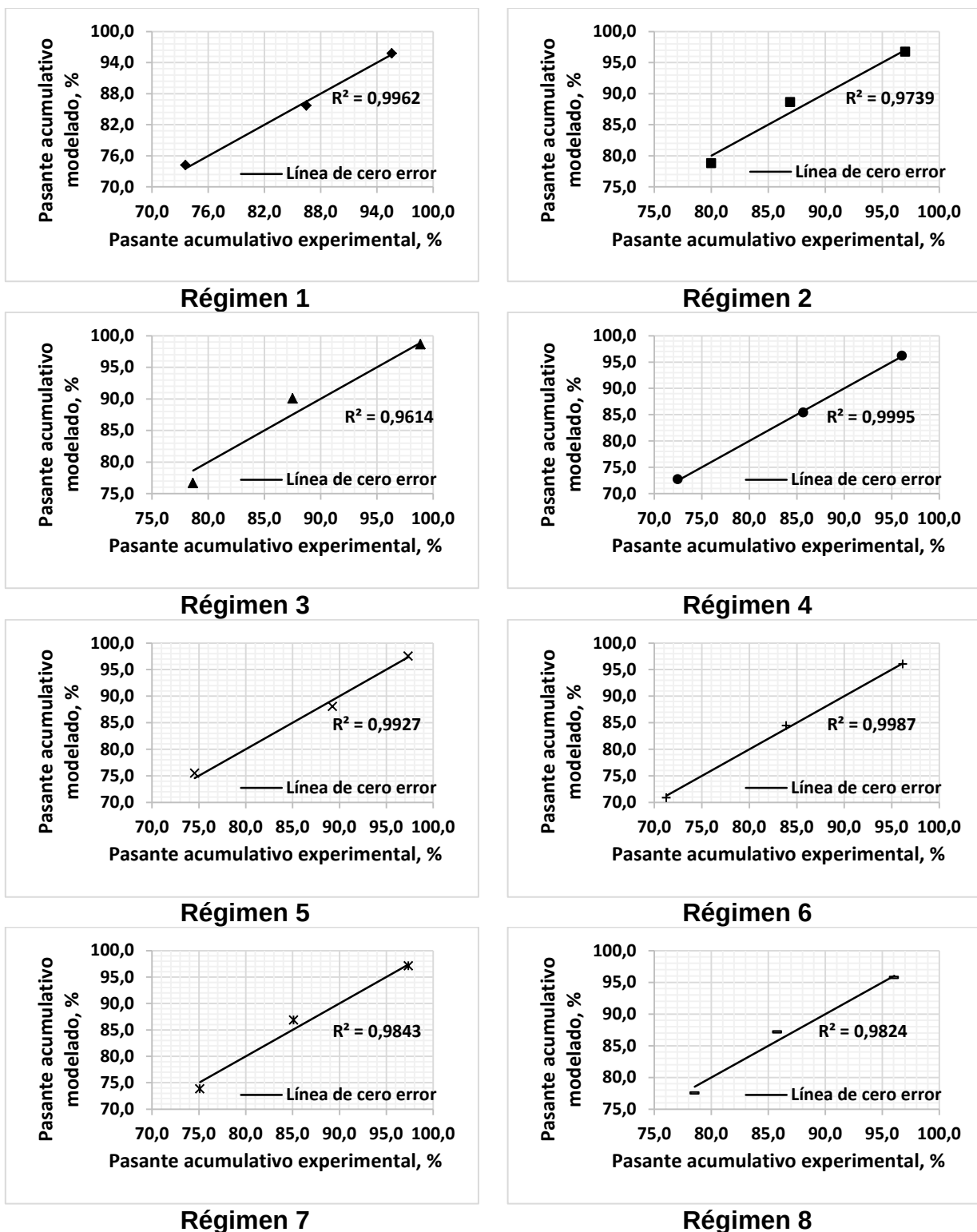


Figura 18 Correlación entre los valores modelados, mediante la función de Rosin–Rammler y los valores de los contenidos de las clases granulométricas recalculadas (experimentales) para el producto final (carga de bolas: 45 %).

Conclusiones parciales

- En la totalidad de los casos, las variables de operación no ejercen ninguna influencia sobre la variabilidad de los parámetros de las funciones de Gaudin–Schuhmann y Rosin–Rammler, no siendo así, los parámetros " x_{50} ", " b " de la función Swebrec, para la descarga del molino (carga de bolas del 40 %) y producto final (carga de bolas del 45 %), y $x_{\max}$ para el producto recirculado (carga de bolas del 45 %)
- A pesar del alto grado de linealidad de todos los modelos; para una carga de bolas del 40 %, el modelo que mejor ajuste presentó (menor error de reproducibilidad), para la descarga del molino, fue el modelo de Gaudin–Schuhmann y, para el producto recirculado y el producto final, fue el modelo de Rosin–Rammler; mientras que, para el 45 % de carga de bolas, los modelos de mayor ajuste, para la descarga del molino y el producto final, fue el modelo de Rosin–Rammler y, para el producto recirculado, el modelo de Gaudin–Schuhmann.

CONCLUSIONES FINALES

1. Los valores de la carga circulante determinados por el procedimiento propuesto por Coello (2015) y los contenidos de las clases granulométricas resultantes de su ajuste al parámetro citado minimizan los errores cometidos durante la toma y el tratamiento de las muestras, y la determinación de los contenidos de las clases granulométricas.
2. El análisis de varianza multifactorial y de regresión lineal múltiple muestra que las variables de operación ejercen influencia, solo en los parámetros " x_{50} ", " b " de la función Swebrec, para la descarga del molino (carga de bolas del 40 %) y el producto final (carga de bolas del 45 %), y " x_{max} " para el producto recirculado (carga de bolas del 45 %); en el resto de los casos, no se observa ninguna influencia.
3. Se demostró el alto grado de ajuste de los tres modelos de distribución, independientemente de la carga de bolas empleada; sin embargo, para el 40 % de carga de bolas, se propone emplear la función Gaudin–Schuhmann para la caracterización granulométrica de la descarga del molino, y la función de Rosin–Rammler, para el producto recirculado y producto final; mientras que, para el 45 % de carga de bolas, se propone la función de Rosin–Rammler, para la descarga del molino y el producto final, y el producto recirculado, la función de Gaudin–Schuhmann.

RECOMENDACIONES

- Realizar la simulación de la distribución de tamaño de los productos de la molienda de mineral laterítico, a partir de los parámetros de los modelos obtenidos.
- Evaluar la influencia de los modelos de distribución de los productos de la molienda del mineral laterítico en la obtención de la función clasificación de Whiten, (1972), la función fractura de Austin y Luckie, (1972) y la función selección de Austin, et al, (1984) .

BIBLIOGRAFÍA

1. Alatola, J., 2011. Charge Dynamics in Tumbling Mills: Simulation and Measurements with an In-Mill Sensor, Sweden: PhD Thesis Lulea University of Technology.
2. Aldrich, C., 2013. Consumption of Steel Grinding Media in Mills. A review. Mineral Engineering , Issue 49, pp. 77 - 91.
3. Álvarez, R. B., 2009. Evaluación de la influencia de los modelos de representación de distribución de tamaños de partícula en el Índice de Bond, Mieres: Universidad de Oviedo, España.
4. Álvarez, R. B., 2010. Análisis de la influencia de los modelos de distribución de tamaño de partículas en la determinación de consumos energéticos en molienda mediante el método de Bond, Oviedo, España: Tesis de Doctorado. Universidad de Oviedo.
5. Álvarez, R. B., González, G. G., Coello, V. A. L. & Menéndez, A. J. M., 2016. Product size distribution function influence on interpolation calculations in the Bond ball mill grindability test. International Journal of Mineral Processing, Issue 157, pp. 16 - 20.
6. Austin, G. L. & Concha, F., 1994. Diseño y Simulación de Circuitos de Molienda y Clasificación. Concepción, Chile: CYTED.
7. Austin, L. G., Menacho, J. M. & Percy, F., 1987. A general model for semi-autogenous and autogenous milling. Proceedings of the 20th International Symposium of Applications of Computers and Maths in Mineral Industries, Volumen 2, p. 107–126.
8. Beke, B., 1964. Principles of Comminution. Maclaren: s.n.
9. Boizán, M., 1984. Optimización (sistemas estáticos). Santiago de Cuba: Editorial Oriente.

10. Bush, V., 2013. Integrated Sustainable Energy Management in Mining Operations. Mining Engineering. Sustainable Energy, pp. 41-43.
11. Coello-Velázquez, A. L., 1993a. Sobersenstobovanie tehnologii izmelchenia lateritovij rud, Saint Petersburg: Dis. na izk. uch. step. Kan. tecn. nauk. Inst. Mejanobr.
12. Coello-Velázquez, A. L., 1993b. Consideraciones sobre la molienda seca de minerales lateríticos. Minería y Geología, XIII(2), pp. 37-42.
13. Coello-Velázquez, A. L., 2015. Procedimiento para la determinación de la carga circulante en circuitos cerrados de trituración y molienda. Minería y Geología, 31(2), pp. 66 - 79.
14. Coello-Velázquez, A. y otros, 2009. Aportes al conocimiento de la molienda seca de las menas lateríticas, Moa, Holguín, Cuba: PROPUESTA DE PREMIO NACIONAL A LA ACADEMIA DE CIENCIAS DE CUBA.
15. Coello-Velázquez, A. L., Marrero, R. S. & Hernández, F. A., 1994. Control de la carga interior del molino a través de terceros parámetros. Minería y Geología, 11(1), pp. 35 - 39.
16. Coello-Velázquez, A. L., Menéndez, A. J. M. & Laborde, R., 2008. Grindability of lateritic nickel ore in Cuba. Powder Technology, 182(1), pp. 113-115.
17. Coello-Velázquez, A. L. & Tijonov, O. H., 1996. Regularidad en la molienda de los minerales lateríticos. Minería y Geología, XIII(3), pp. 57-60.
18. Fuerstenau, D. W. & Abouzeid, Z. M., 2002. The Energy Efficiency of Ball Mill Comminution. International Journal of Mineral Processing, Issue N° 67.
19. Fuerstenau, M. C. & Han, K. N., 2003. Principles of Mineral Processing. Littleton, Colorado: Society for Mining, Metallurgy and Exploration, Inc (SME).
20. Galindo, M. Y., 2016. Determinación de los consumos energéticos de la molienda del carbón antracita, el mineral laterítico y de sus mezclas, Moa: Trabajo de Diploma. ISMMM.

21. Gupta, A. & Yan, D., 2016. Mineral Processing Design and Operation. An Introduction. Segunda Edición ed. Amsterdam: Elsevier.
22. Harris, C. C., 1968. The Application of Size Distribution Equations to Multi-Event Comminution Process. Transactions of AIME, Issue 241, p. 343–358.
23. Harris, C. C., 1971. Graphical presentation of size distribution data: an assessment of current practice. Trans. IMM , Sec. C 80 (Sept.)(133).
24. Kelly, E. & Spottiswood, D., 1982. Introduction to Mineral Processing. New York: John Wiley and Sons.
25. King, P., 2012. Modeling of Simulation of Mineral Processing. Segunda Edición ed. Englewood, Colorado: SME.
26. L., C.-V. A., 1999. Curso de preparación mecánica de menas y minerales, Moa, Holguín.: Dpto. Metalurgia ISMMM.
27. Laborde, B. R., 2004. Diagnóstico Energético en el Proceso de Molienda de la Laterita. Minería y Geología, Issue N° 3 y 4, pp. 107 - 113.
28. Laborde, B. R., Coello, V. A. & Angulo, L. O., 2003. Racionalización del Consumo de Energía en la Molienda de Minerales Lateríticos. SIE, pp. 1 - 4.
29. Llorente, L., 2003. Proyección para el incremento de la productividad hasta 50 mil t de níquel + cobalto en la instalación de molienda de la fábrica "Ernesto Che Guevara", Moa: Tesis a la opción del título de Master en Beneficio de Minerales. ISMMM.
30. Lynch, A. J., 1980. Circuitos de Trituración y Molienda de Minerales. Su Simulación, Optimización, Diseño y Control. Madrid: Rocas y Minerales.
31. Mitrofánov, S. I., Barski, L. A. & Samygin, V. D., 1982. Investigación de la capacidad de enriquecimiento de los minerales. Moscú: Mir.
32. Napier-Munn, T. J., Morrell, S., Morrison, R. D. & Kojovic, T., 2005. Circuitos de Trituración de Mineral Su Operación y Optimización. Queensland, Australia: JKMRRC.

33. Ouchterlony, F., 2003. Bend it like Beckham or a widerange yet simple fragment size distribution for blasted and crushed rock, Leoben, Austria1: Montanuniversität: EU project GRD-2000-25224. Less Fines project int. techn. rpt no. 78..
34. Ouchterlony, F., 2005. The Swebrec function: linking fragmentation by blasting and crushing. Mining Techn. (Trans. of the Inst. of Mining & Met. A), Issue 114, pp. A29 - A44.
35. Ouchterlony, F., 2010. Fragmentation characterization; the Swebrec function and its use in blast engineering. London, ISBN 978-0-415-48296-7, Rock Fragmentation by Blasting – Sanchidrián (ed).
36. Pourghahramani, P., 2012. Effects of ore characteristics on product shape properties and breakage mechanisms in industrial SAG mills.. Minerals Engineering, Volumen 32, p. 30–37.
37. Rojas, P. A., 1995. Principales fases minerales portadoras de níquel en los horizontes lateríticos del yacimiento de Moa, Moa: Tesis de doctorado. ISMMM.
38. Sayadi, A. R., Khalesi, M. R. & Borji, M. K., 2014. A Parametric Cost Model for Mineral Grinding Mills. Mineral Engineering, Issue 55, pp. 96-102.
39. Schuhmann, R. J., 1940. Principles of comminution, I-Size distribution and surface calculations. AIME, Issue Technical Publication N° 1189, pp. 1-11.
40. Spiegel, M. R., Schiller, J. & Srinivasan, R., 2001. Probability and Statistics. New York: McGraw Hill, .
41. Taşdemir, A. & Taşdemir, T., 2009. A Comparative Study on PSD Models for Chromite Ores Comminuted by Different Devices. Part. Part. Syst. Charact., Volumen 26, pp. 69-79.
42. Torres, G. M., 2016. Consumo Energético de la molienda del mineral laterítico con carbón bituminoso aditivo, Moa: Trabajo de Diploma. ISMMM.



43. Vera, S. L., 2001. Procedimiento para la determinación de las redes racionales de exploración de los yacimientos lateríticos de níquel y cobalto en la región de Moa, Moa: Tesis de doctorado. ISMMM.
44. Wills, B. A. & Finch, J. A., 2016. Mineral Processing Technology: An Introduction to the Practical Aspects of Ore Treatment and Mineral Recovery. s.l.:Elsevier.
45. Wills, B. A. & Napier-Munn, T., 2006. Mineral Processing Technology. An Introduction to the Practical Aspects of Ore Treatment and Mineral Recovery. 7th Edition ed. s.l.:Elsevier Science & Technology Books.

ANEXOS

ANEXO I

Tabla A1.1 Composición granulométrica de la descarga del molino, carga de bolas 40 %

N°	Regímenes de trabajo			Composición granulométrica		
	Flujo de mineral Q_a , t/h	Flujo de aire Q_b , m^3/h	Ángulo de inclinación, α	$Y_{mm}^{-0,044}$, %	$Y_{mm}^{-0,074}$, %	$Y_{mm}^{-0,149}$, %
1	+	+	+	59,2	72,1	82,25
2	+	-	-	57,67	68,99	72,77
3	-	+	-	57,95	63,84	75,62
4	-	-	+	43,8	58,1	86,3
5	+	+	-	76,13	73,77	73,85
6	+	-	+	57,57	69,97	85,21
7	-	+	+	53,72	59,17	69,21
8	-	-	-	47,69	53,3	64,4

Tabla A1.2 Composición granulométrica del producto recirculado, carga de bolas 40 %.

N°	Regímenes de trabajo			Composición granulométrica					
	Flujo de mineral Q_a , t/h	Flujo de aire Q_b , m^3/h	Ángulo de inclinación, α	Cono interior			Cono exterior		
				$Y_{mm}^{-0,044}$, %	$Y_{mm}^{-0,074}$, %	$Y_{mm}^{-0,149}$, %	$Y_{mm}^{-0,044}$, %	$Y_{mm}^{-0,074}$, %	$Y_{mm}^{-0,149}$, %
1	+	+	+	36,45	41,21	61,34	26,58	28,34	33,19
2	+	-	-	37,81	39,73	50,5	36,50	46,61	37,00
3	-	+	-	38,17	43,32	53,77	44,29	47,53	41,97
4	-	-	+	38,07	40,38	60,25	31,55	38,75	47,99
5	+	+	-	43,75	50,65	60,93	38,08	40,71	49,94
6	+	-	+	38,53	48,67	54,11	31,08	35,90	55,14
7	-	+	+	43,51	48,43	59,92	40,88	43,91	49,64
8	-	-	-	33,04	45,33	54,92	-	-	-

Tabla A1.3 Composición granulométrica del producto final, carga de bolas 40 %.

N°	<i>Regímenes de trabajo</i>			<i>Composición granulométrica</i>		
	Flujo de mineral Q_a , t/h	Flujo de aire Q_b , m^3/h	Ángulo de inclinación, α	$Y_{mm}^{-0,044}$, %	$Y_{mm}^{-0,074}$, %	$Y_{mm}^{-0,149}$, %
1	+	+	+	72,04	79,63	92,21
2	+	-	-	67,32	77,65	93,39
3	-	+	-	77,89	82,87	88,4
4	-	-	+	41,57	64,71	84,86
5	+	+	-	78,28	83,68	90,88
6	+	-	+	78,26	84,21	92,45
7	-	+	+	79,76	83,91	95,04
8	-	-	-	64,12	71,75	89,21

Tabla A1.4 Composición granulométrica de la descarga del molino, carga de bolas 45 %

N°	<i>Regímenes de trabajo</i>			<i>Composición granulométrica</i>		
	Flujo de mineral Q_a , t/h	Flujo de aire Q_b , m^3/h	Ángulo de inclinación, α	$Y_{mm}^{-0,044}$, %	$Y_{mm}^{-0,074}$, %	$Y_{mm}^{-0,149}$, %
1	+	+	+	64,13	79,22	87,56
2	+	-	-	44,91	50,41	67,67
3	-	+	-	50,2	61,31	81,03
4	-	-	+	60,56	69,21	85,28
5	+	+	-	53,49	76,89	85,34
6	+	-	+	46,51	52,58	70,63
7	-	+	+	59,77	66,17	81,93
8	-	-	-	53,13	61,37	79,46

Tabla A1.5 Composición granulométrica del producto recirculado, carga de bolas 45 %.

<i>Regímenes de trabajo</i>				<i>Composición granulométrica</i>					
N°	Flujo de mineral Q_a , t/h	Flujo de aire Q_b , m^3/h	Ángulo de inclinación, α	<i>Cono interior</i>			<i>Cono exterior</i>		
				$Y_{mm}^{-0,044}$, %	$Y_{mm}^{-0,074}$, %	$Y_{mm}^{-0,149}$, %	$Y_{mm}^{-0,044}$, %	$Y_{mm}^{-0,074}$, %	$Y_{mm}^{-0,149}$, %
1	+	+	+	45,3	41,31	57,11	33,10	38,08	52,21
2	+	-	-	42,36	46,83	67,48	35,70	42,49	60,51
3	-	+	-	42,71	49,34	69,99	41,41	47,74	55,42
4	-	-	+	38,61	34,78	44,25	37,25	42,04	53,56
5	+	+	-	43,8	50,94	71,42	33,66	41,29	59,78
6	+	-	+	42,58	49,79	63,53	37,70	43,12	58,55
7	-	+	+	34,95	49,7	51,25	31,96	38,01	51,77
8	-	-	-	33,96	43,04	63,19	34,35	44,73	56,96

Tabla A1.5 Composición granulométrica del producto final, carga de bolas 45 %.

<i>Regímenes de trabajo</i>				<i>Composición granulométrica</i>		
N°	Flujo de mineral Q_a , t/h	Flujo de aire Q_b , m^3/h	Ángulo de inclinación, α	$Y_{mm}^{-0,044}$, %	$Y_{mm}^{-0,074}$, %	$Y_{mm}^{-0,149}$, %
1	+	+	+	75,74	85,08	95,66
2	+	-	-	79,98	86,92	97,09
3	-	+	-	80,34	88,16	97,67
4	-	-	+	73,56	87,30	94,06
5	+	+	-	78,77	87,18	97,41
6	+	-	+	71,33	84,20	95,92
7	-	+	+	74,84	86,90	96,29
8	-	-	-	78,77	85,10	97,04

ANEXO II

Tabla A2.1 Linealización de la función Gaudin–Schuhmann para la descarga del molino, carga de bolas 40 %

Nº	Ecuación	Pendiente	Intercepto
1	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2369 \log x + 0,1122$	0,2369	0,1122
2	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2193 \log x + 0,0615$	0,2193	0,0615
3	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,1455 \log x - 0,0182$	0,1455	-0,0182
4	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,5623 \log x + 0,4023$	0,5623	0,4023
5	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,0758 \log x - 0,0384$	0,0758	-0,0384
6	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2315 \log x + 0,1057$	0,2315	0,1057
7	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,1914 \log x - 0,0070$	0,1914	-0,0070
8	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,3071 \log x - 0,0790$	0,0790	0,0790

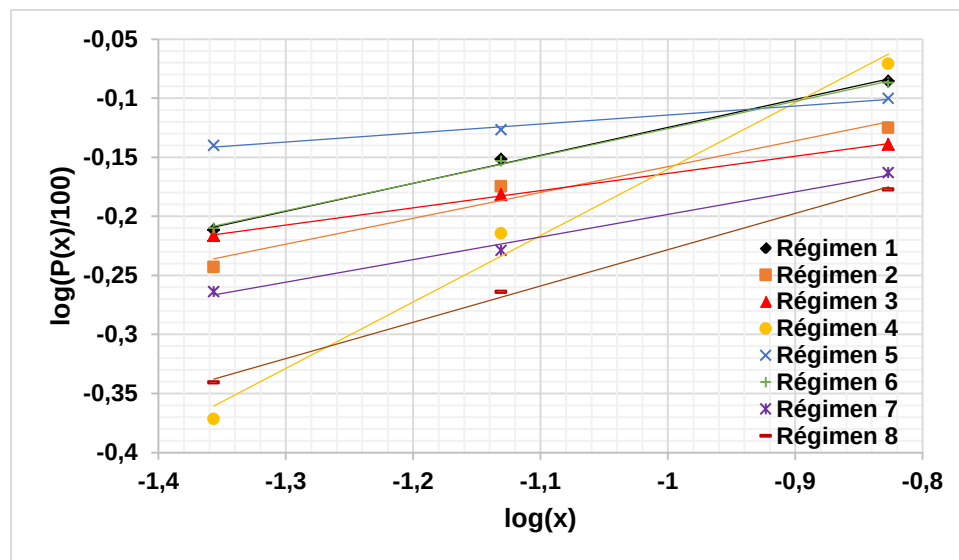


Figura A2.1 Linealización de la función Gaudin–Schuhmann para la descarga del molino, carga de bolas 40 %

Tabla A2.2 Linealización de la función Rosin–Rammmler para la descarga del molino, carga de bolas 40 %

Nº	Ecuación	Pendiente	Intercepto
1	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,4857 \ln x + 1,4676$	0,4857	1,4676
2	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,3987 \ln x + 1,1015$	0,3987	1,1015
3	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,2363 \ln x + 0,7650$	0,2363	0,7650
4	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 1,0080 \ln x + 2,5604$	1,0080	2,5604
5	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,1687 \ln x + 0,7728$	0,1687	0,7728
6	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,4740 \ln x + 1,4346$	1,4346	1,4346
7	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,3221 \ln x + 0,7517$	0,7517	0,7517
8	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,4787 \ln x + 1,0032$	0,4787	1,0032

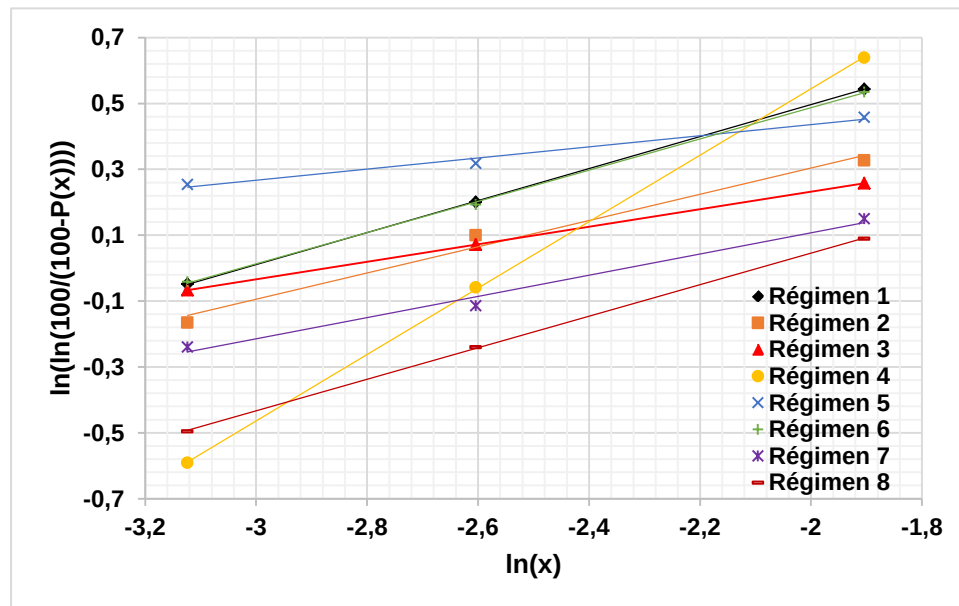


Figura A2.2 Linealización de la función Rosin–Rammmler para la descarga del molino, carga de bolas 40 %

Tabla A2.3 Linealización de la función Gaudin–Schuhmann para el producto recirculado, carga de bolas 40 %

Nº	Ecuación	Pendiente	Intercepto
1	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,3504 \log x - 0,0423$	0,3504	-0,0423
2	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,1073 \log x - 0,2655$	0,1071	-0,2655
3	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,167 \log x - 0,1679$	0,167	-0,1679
4	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,3665 \log x + 0,029$	0,3665	0,029
5	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2167 \log x - 0,0899$	0,2167	-0,0899
6	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,4171 \log x + 0,0926$	0,4171	0,0926
7	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2302 \log x - 0,0702$	0,2302	-0,0702
8	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,3597 \log x - 0,0352$	0,3597	-0,0352

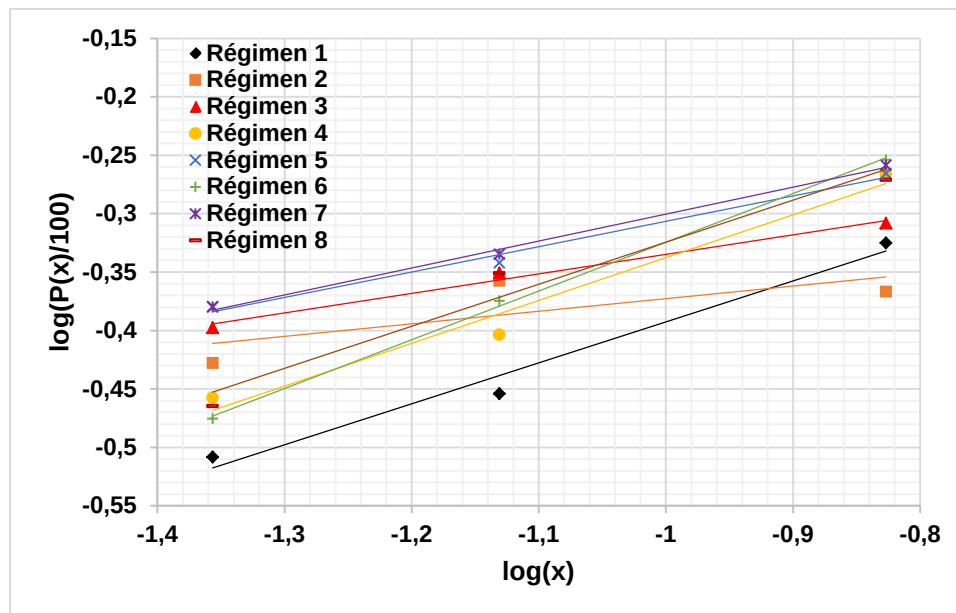


Figura A2.3 Linealización de la función Gaudin–Schuhmann para el producto recirculado, carga de bolas 40 %

Tabla A2.4 Linealización de la función Rosin–Rammmler para el producto recirculado, carga de bolas 40 %

Nº	Ecuación	Pendiente	Intercepto
1	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,4524 \ln x + 0,3951$	0,4524	0,3951
2	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,1402 \ln x - 0,2720$	0,1402	-0,2720
3	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,2277 \ln x + 0,0496$	0,2277	0,0496
4	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,4990 \ln x + 0,6742$	0,4990	0,6742
5	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,3060 \ln x + 0,3240$	0,3060	0,3240
6	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,5682 \ln x + 0,8771$	0,5682	0,8771
7	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,3267 \ln x + 0,3923$	0,3267	0,3923
8	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,4871 \ln x + 0,6862$	0,4871	0,6862

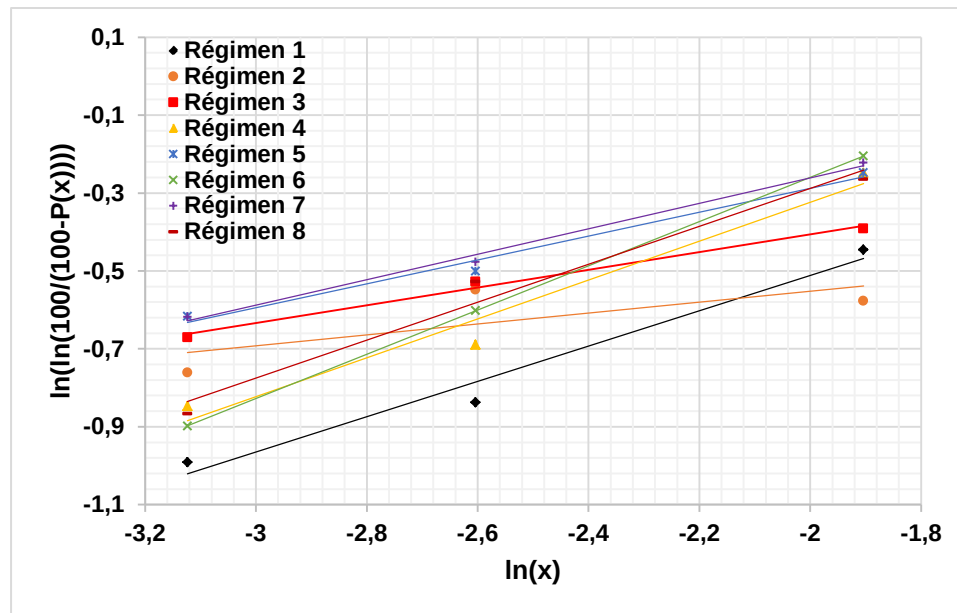


Figura A2.4 Linealización de la función Rosin–Rammmler para el producto recirculado, carga de bolas 40 %

Tabla A2.5 Linealización de la función Gaudin–Schuhmann para el producto final, carga de bolas 40 %

Nº	Ecuación	Pendiente	Intercepto
1	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2212 \log x + 0,1510$	0,2212	0,1510
2	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2494 \log x + 0,1727$	0,2494	0,1727
3	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,1369 \log x + 0,0678$	0,1369	0,0678
4	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,5677 \log x + 0,4132$	0,5677	0,4132
5	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,0532 \log x - 0,0195$	0,0532	-0,0195
6	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,1848 \log x + 0,1304$	0,1848	0,1304
7	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,1497 \log x + 0,0997$	0,1497	0,0997
8	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2569 \log x + 0,1544$	0,2569	0,1544

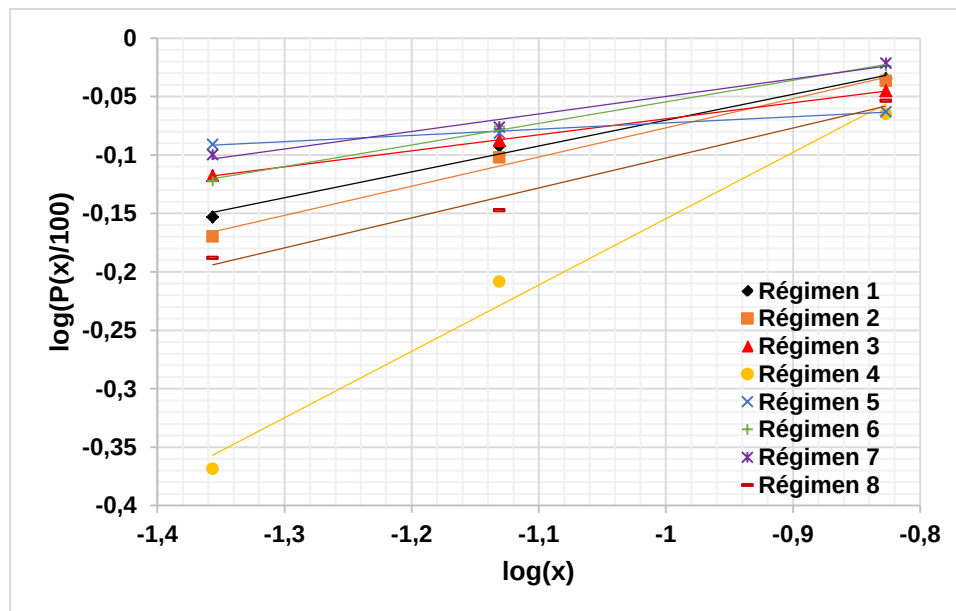


Figura A2.5 Linealización de la función Gaudin–Schuhmann para el producto final, carga de bolas 40 %

Tabla A2.6 Linealización de la función Rosin–Rammler para el producto final, carga de bolas 40 %

Nº	Ecuación	Pendiente	Intercepto
1	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,6133 \ln x + 2,1059$	0,6133	2,1059
2	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,6589 \ln x + 2,1728$	0,6589	2,1728
3	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,3930 \ln x + 1,5776$	0,3930	1,5776
4	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 1,0352 \ln x + 2,6544$	1,0352	2,6544
5	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,1524 \ln x + 0,9802$	0,1524	0,9802
6	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,6069 \ln x + 2,2184$	0,6069	2,2184
7	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,5446 \ln x + 2,1105$	0,5446	2,1105
8	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,6034 \ln x + 1,8799$	0,6034	1,8799

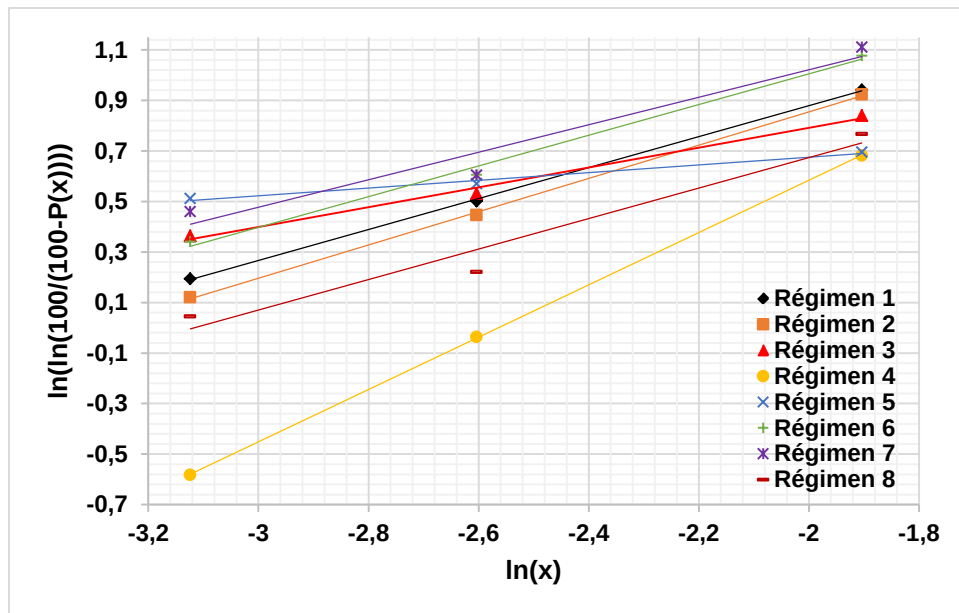


Figura A2.6 Linealización de la función Rosin–Rammler para el producto final, carga de bolas 40 %

Tabla A2.7 Linealización de la función Gaudin–Schuhmann para la descarga del molino, carga de bolas 45 %

Nº	Ecuación	Pendiente	Intercepto
1	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2200 \log x + 0,1285$	0,2200	0,1285
2	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,3502 \log x + 0,1153$	0,3502	0,1153
3	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2922 \log x + 0,1329$	0,2922	0,1329
4	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2300 \log x + 0,1085$	0,2300	0,1085
5	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2828 \log x + 0,1719$	0,2828	0,1719
6	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,3257 \log x + 0,1081$	0,3257	0,1081
7	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2450 \log x + 0,1096$	0,2450	0,1096
8	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,3460 \log x + 0,1880$	0,3460	0,1880

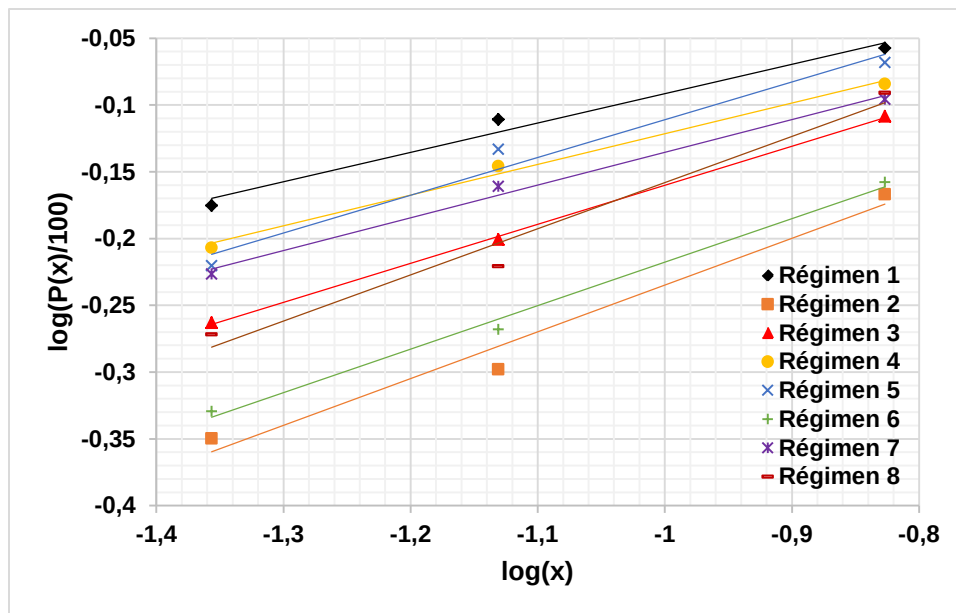


Figura A2.7 Linealización de la función Gaudin–Schuhmann para la descarga del molino, carga de bolas 45 %

Tabla A2.8 Linealización de la función Rosin–Rammler para la descarga del molino, carga de bolas 45 %

Nº	Ecuación	Pendiente	Intercepto
1	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,5222 \ln x + 1,7396$	0,5222	1,7396
2	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,5478 \ln x + 1,7069$	0,5478	1,7069
3	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,5351 \ln x + 1,4178$	0,5351	1,4178
4	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,4762 \ln x + 1,4609$	0,4767	1,4609
5	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,6007 \ln x + 1,1851$	0,6007	1,1851
6	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,5226 \ln x + 1,1491$	0,5226	1,1491
7	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,4804 \ln x + 1,4005$	0,4804	1,4005
8	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,6497 \ln x + 1,7069$	0,6497	1,7069

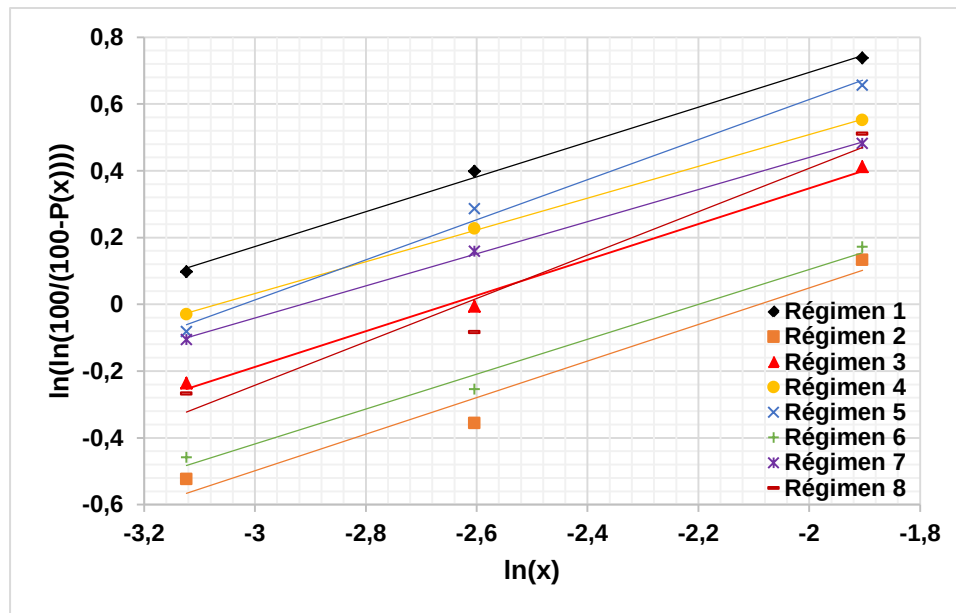


Figura A2.8 Linealización de la función Rosin–Rammler para la descarga del molino, carga de bolas 45 %

Tabla A2.9 Linealización de la función Gaudin–Schuhmann para el producto recirculado, carga de bolas 45 %

Nº	Ecuación	Pendiente	Intercepto
1	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2923 \log x - 0,0346$	0,2923	-0,0346
2	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,4026 \log x + 0,1273$	0,4026	0,1273
3	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,4081 \log x + 0,1449$	0,4081	0,1449
4	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2417 \log x - 0,1172$	0,2417	-0,1172
5	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,4853 \log x + 0,2198$	0,4853	0,2198
6	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,3652 \log x + 0,0866$	0,3652	0,0866
7	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,3560 \log x + 0,0183$	0,3560	0,0183
8	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 1,0437 \log x + 0,6075$	1,0437	0,6075

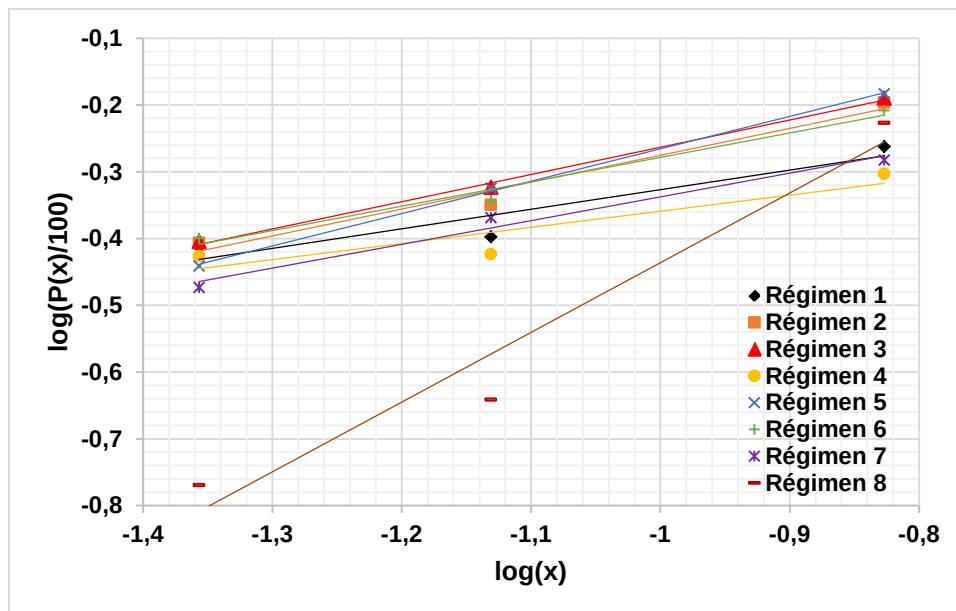


Figura A2.9 Linealización de la función Gaudin–Schuhmann para el producto recirculado, carga de bolas 45 %

Tabla A2.10 Linealización de la función Rosin–Rammler para el producto recirculado, carga de bolas 45 %

Nº	Ecuación	Pendiente	Intercepto
1	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,4066 \ln x + 0,4940$	0,4066	0,4940
2	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,5911 \ln x + 1,1003$	0,5911	1,1003
3	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,6037 \ln x + 1,1712$	0,6037	1,1712
4	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,3260 \ln x + 0,2039$	0,3260	0,2039
5	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,7086 \ln x + 1,4093$	0,7086	1,4093
6	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,5329 \ln x + 0,9507$	0,5329	0,9507
7	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,4772 \ln x + 0,6205$	0,4772	0,6205
8	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 1,3186 \ln x + 2,3100$	1,3186	2,3100

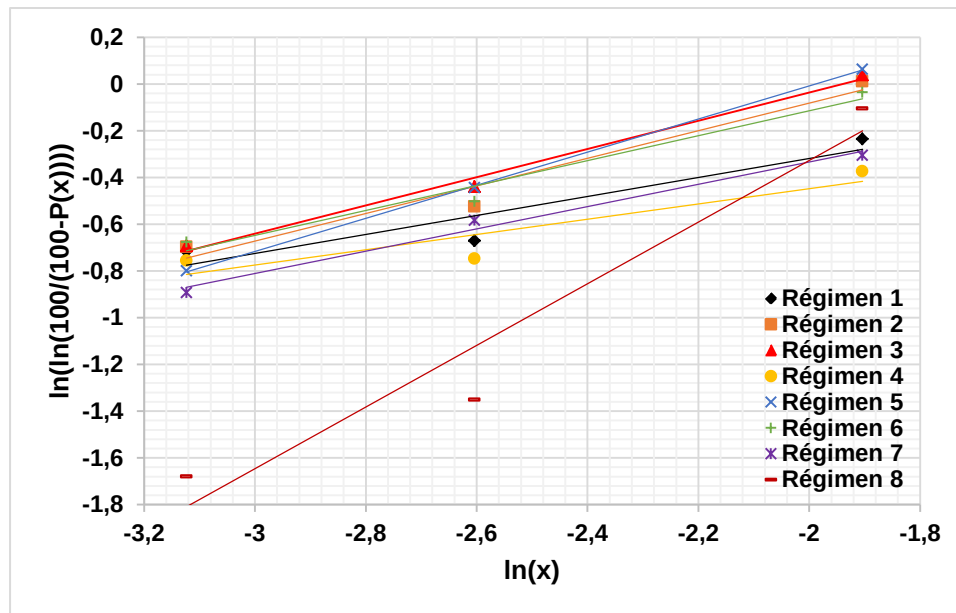


Figura A2.10 Linealización de la función Rosin–Rammler para el producto recirculado, carga de bolas 45 %

Tabla A2.11 Linealización de la función Gaudin–Schuhmann para el producto final, carga de bolas 45 %

Nº	Ecuación	Pendiente	Intercepto
1	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2105 \log x + 0,1606$	0,2105	0,1606
2	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,1581 \log x + 0,1177$	0,1581	0,1177
3	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,1871 \log x + 0,1509$	0,1871	0,1509
4	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2276 \log x + 0,1767$	0,2276	0,1767
5	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2133 \log x + 0,1728$	0,2133	0,1728
6	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2430 \log x + 0,1883$	0,2430	0,1883
7	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,2117 \log x + 0,1652$	0,2117	0,1652
8	$\log\left(\frac{P(x)}{100}\right) = 0,1647 \log x + 0,1190$	0,1647	0,1190

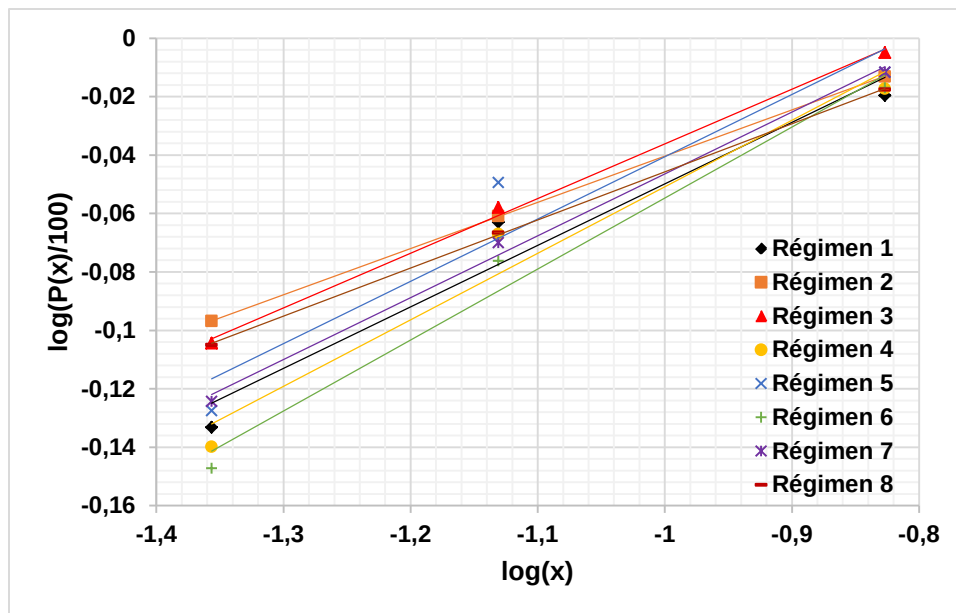


Figura A2.11 Linealización de la función Gaudin–Schuhmann para el producto final, carga de bolas 45 %

Tabla A2.12 Linealización de la función Rosin–Rammler para el producto final, carga de bolas 45 %

Nº	Ecuación	Pendiente	Intercepto
1	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,6954 \ln x + 2,4751$	0,6954	2,4751
2	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,6487 \ln x + 2,4647$	0,6487	2,4647
3	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,8888 \ln x + 3,1506$	0,8888	3,1506
4	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,7548 \ln x + 2,6186$	0,7548	2,6186
5	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,7929 \ln x + 2,8181$	0,7929	2,8181
6	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,7907 \ln x + 2,6794$	0,7907	2,6797
7	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,7957 \ln x + 2,7791$	0,7957	2,7791
8	$\ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - P(x)}\right)\right) = 0,6142 \ln x + 2,3199$	0,6142	2,3199

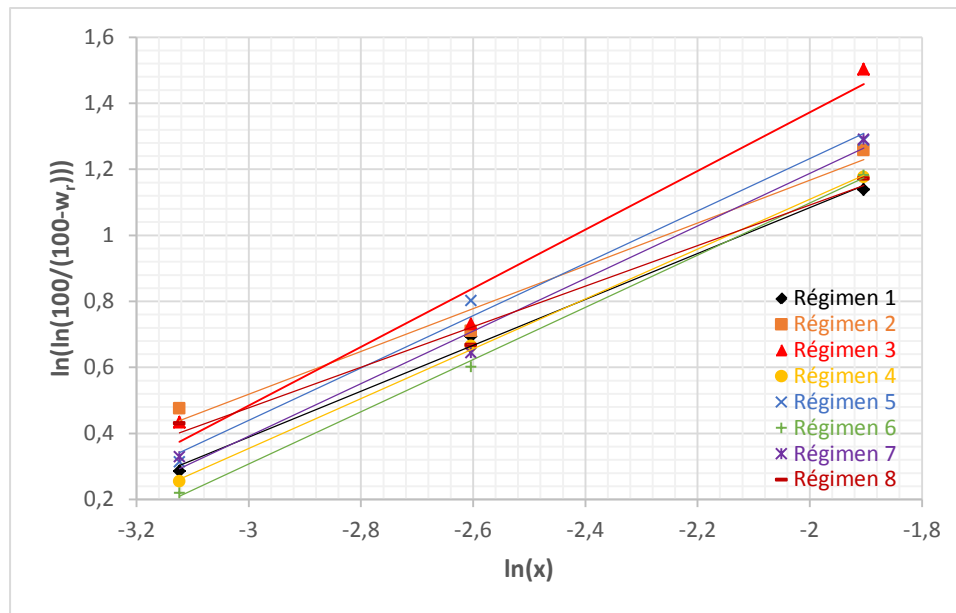


Figura A2.12 Linealización de la función Rosin–Rammler para el producto final, carga de bolas 45 %.

ANEXO III

Tabla A3.1 Valores de los coeficientes de regresión múltiple para la descarga del molino, carga de bolas 40 %.

Modelo de distribución		Coeficientes de regresión			
		Constante	Q_a	Q_b	α
Gaudin – Schuhmann	k	0,9485	0,1567	0,5436	-0,4569
	m	0,2983	-0,1075	-0,0317	0,0072
Rosin – Rammeler	a	0,0636	-0,0209	-0,0148	0,0047
	n	0,4465	-0,0647	-0,1433	0,1259
Función Swebrec	X_{ma}	1,6465	0,1461	1,0126	-0,8199
	x				
	X_{50}	0,0284	-0,0108	-0,0111	0,0040
	b	1,7322	-0,0930	-0,0347	0,0106

Tabla A3.2 Valores de los coeficientes de regresión múltiple para producto recirculado, carga de bolas 40 %.

Modelo de distribución		Coeficientes de regresión			
		Constante	Q_a	Q_b	α
Gaudin – Schuhmann	k	39,550	36,106	-35,534	-38,357
	m	0,2769	-0,0039	-0,0358	0,0642
Rosin – Rammeler	a	1,1934	0,7912	-0,7257	-0,8954
	n	0,3760	-0,0091	-0,0476	0,0858
Función Swebrec	X_{ma}	0,6223	0,1025	-0,0497	-0,1851
	x				
	X_{50}	0,1513	0,0231	-0,0157	-0,0211
	b	0,8723	-0,0134	-0,0048	0,0935

Tabla A3.3 Valores de los coeficientes de regresión múltiple para producto final, carga de bolas 40 %.

Modelo de distribución		Coeficientes de regresión			
		Constante	Q_a	Q_b	α
Gaudin – Schuhmann	k	0,4883	0,2450	0,2789	-0,2864
	m	0,2275	-0,0503	-0,0872	0,0534
Rosin – Rammeler	a	0,0321	-0,0079	-0,0139	0,0069
	n	0,5759	-0,0682	-0,1501	0,1241
Función Swebrec	X_{ma}	0,6102	0,3386	0,3775	-0,3909
	x				

x_{50}	0,0156	-0,0056	-0,0099	0,0046
b	1,5309	-0,0547	-0,0679	0,0154

Tabla A3.4 Valores de los coeficientes de regresión múltiple para la descarga del molino, carga de bolas 45 %.

Modelo de distribución		Coeficientes de regresión			
		Constante	Q_a	Q_b	α
Gaudin – Schuhmann	k	0,3469	0,0134	-0,0426	0,0083
	m	0,2787	0,0159	-0,0343	0,0235
Rosin – Rammler	a	0,0704	0,0094	-0,0180	-0,0085
	n	0,5418	0,0065	-0,0072	-0,415
Función Swebrec	x_{ma}	0,4732	0,0738	-0,0874	0,0219
	x				
	x_{50}	0,3414	0,0055	-0,0087	-0,0051
	b	1,4824	0,0004	0,1692	0,1158

Tabla A3.5 Valores de los coeficientes de regresión múltiple para producto recirculado, carga de bolas 45 %.

Modelo de distribución		Coeficientes de regresión			
		Constante	Q_a	Q_b	α
Gaudin – Schuhmann	k	0,9217	-0,2398	-0,1728	0,5371
	m	0,4494	-0,0630	-0,0639	-0,1356
Rosin – Rammler	a	0,2352	-0,0459	-0,0228	0,0828
	n	0,6206	-0,0608	-0,0716	-0,1849
Función Swebrec	x_{ma}	0,3593	-0,0235	0,0001	0,0785
	x				
	x_{50}	0,1129	-0,0129	-0,0048	0,0132
	b	1,0370	-0,0188	-0,0892	-0,1359

Tabla A3.6 Valores de los coeficientes de regresión múltiple para producto final, carga de bolas 45 %.

Modelo de distribución		Coeficientes de regresión			
		Constante	Q_a	Q_b	α
Gaudin – Schuhmann	k	0,1693	-0,0004	-0,0069	-0,0008
	m	0,2020	0,0042	0,0037	0,0212
Rosin – Rammler	a	0,0283	0,0	0,0008	0,0026
	n	0,7476	-0,0157	0,0456	0,0115

Función Swebrec	x_{ma}	0,1752	-0,0003	-0,0078	-0,0001
	x				
	x_{50}	0,0099	0,0004	0,0001	0,0025
	b	1,4005	-0,0009	-0,0126	0,0201